



**La lettre de la Preuve  
Novembre/Décembre 2000**

Textes en ligne

**Diagnostic sur la structure et la qualité  
de preuves inadmissibles**

par

Philippe R. Richard  
Aula Escola Europea  
Barcelone

**Editeur : Maria-Alessandra Mariotti**

*English Editor* : Virginia Warfield, *Editor en Castellano* : Patricio Herbst

*Advisory Board* : Nicolas Balacheff, Paolo Boero, Daniel Chazan, Raymond Duval, Gila Hanna, Guershon Harel, Celia Hoyles, Erika Melis, Michael Otte, Yasuhiro Sekiguchi, Michael de Villiers

# Diagnostic sur la structure et la qualité de preuves inadmissibles

**Philippe R. Richard**  
Aula Escola Europea

**RÉSUMÉ.** Avant tout apprentissage intégré de procédures institutionnelles de preuve en géométrie, les habitudes discursives de l'élève produisent rarement des preuves authentiques. Puisque ces dernières sont inappropriées pour diagnostiquer ce que fait l'élève en situation de validation-conviction, il faut développer un outil d'analyse qui respecte la conception de l'élève en matière de preuve et l'idéal didactique auquel il devrait éventuellement s'approcher. À partir d'une définition situationnelle d'une preuve écrite et des particularités de l'exercice en géométrie, nous relevons les caractéristiques structurales de la sémiotique des textes selon l'organisation discursivo-graphique et la texture stratégique. Sur la base objective de ces deux systèmes signifiants, outre une contribution méthodologique, nous proposons une mesure de la qualité d'une preuve susceptible d'évaluer l'évolution d'habiletés acquises après enseignement.

**MOTS CLEFS.** Canevas de la texture stratégique, compétence syntaxique, chaîne de raison, chemin dans un champ proceptuel, forme d'expansion discursivo-graphique, indicateur de qualité, inférence figurative, interprétation sémiotique d'un dessin géométrique, macropropriété, moment de conjecture, moment de preuve, niveau de validation-conviction, raisonnement graphique, relation intraproceptuelle, relation interproceptuelle, schéma discursivo-graphique, stratégie élémentaire de preuve, syntagme graphique, transhypothèse, valeur par recouplement.

## SOMMAIRE.

### Introduction

Les situations de validation-conviction

La notion de preuve

Champ proceptuel, procepts géométriques

Analyse discursive

Stratégie de preuve

*Vérification par expérimentation, généralisation*

*Analyse descriptive, étalement proceptuel*

*Chemin dans un champ proceptuel*

*Entreprise d'une dialectique du contre-exemple*

Qualité d'une preuve

*La cohérence*

*La stabilité*

*La clarté*

*L'intérêt*

*L'authenticité*

Émergence de l'inférence figurative

Conséquences pour l'enseignement

### Conclusion

## Introduction

L'enseignement et l'apprentissage de la géométrie à l'école secondaire se confrontent continuellement au problème du degré de certitude sur les notions considérées. Que ce soit pour se convaincre du bien-fondé d'une propriété ou pour valider une conjecture, il est nécessaire

que s'établissent, dans la structure didactique, des mécanismes de validation-conviction qui soient culturellement reconnus comme valables, condition qui suscite un regard investigateur pour le raisonnement et les stratégies de preuves. Or, dans la plupart des recherches actuelles connexes, on attache de l'importance aux procédures de preuve attestées (même lorsque ces recherches nous exhortent à ne pas les employer), et non pas aux procédures qualifiées d'impossibles et, de ce fait, jamais attestées. Bien qu'il existe une distinction institutionnelle entre une preuve et un raisonnement, tout examen de «preuves» produites en milieu scolaire ne peut s'accomplir essentiellement par comparaison à la norme, sous peine de présupposer une connaissance de l'objet dont l'élève cherche à découvrir le fonctionnement, en l'occurrence les procédures attestées.

### **Les situations de validation-conviction**

L'expert distingue volontiers l'établissement d'une conjecture de la production d'une preuve et peut reconnaître dans ceux-ci les conditions qui commandent une action ou un processus de réflexion. Autant pour lui que pour autrui, il sait juger dans quelle mesure sa preuve entraîne la conviction et, selon les besoins, il doit veiller à son renouvellement. En l'absence d'un enseignement spécifique, l'élève au contraire ne dispose pas toujours d'un tel esprit de discernement.

Néanmoins, lorsqu'on impose la conclusion dans l'énoncé d'un problème par «démontrer que», on empêche toute conjecture et, de fait, on restreint l'envergure de l'éventail des stratégies de preuves disponibles.

Dans une dialectique des preuves et des réfutations (Lakatos, 1986), la conjecture est susceptible de s'ajuster ou de se reformuler après l'exhibition d'un contre-exemple. Or, celui-ci peut apparaître pendant l'élaboration d'une preuve à la suite d'une stratégie planifiée, comme dans un raisonnement par l'absurde, ou d'une découverte qui invite à reprendre le problème depuis le début. Dans ce dernier cas, suivant les situations d'apprentissage de Brousseau (1981), s'agit-il d'une partie intégrante de la situation de validation ou d'un instant propre à la situation de formulation? Parce que notre étude s'intéresse d'entrée à l'aspect structurel de preuves réalisées en milieu scolaire, et non pas aux connaissances produites qui en découlent, il nous semble profitable de reconnaître dans ces situations deux moments, selon la nature de l'activité qui s'y exerce:

- Les moments de conjecture se démarquent en ayant lieu lors d'une réflexion vive et brouillonne qui chemine en appliquant des propriétés de liens compris ou sentis, sans nécessairement pouvoir verbaliser les propriétés ou chercher à les justifier, et sans que l'attention se centre sur la conscience de leur existence. Globalement, ce moment peut s'assimiler à une tâche typique de résolution de problèmes dont la portée ne dépasse pas la conviction personnelle.
- Dans les moments de preuve, la réflexion, cette fois, s'organise: par l'application consciente (stratégie) ou non (exploration) de propriétés caractéristiques, contrôlée par un besoin de validation; ou en suivant une continuité thématique, contrôlée par un besoin de conviction.

Cette vision atomique de moments possède l'avantage d'en identifier deux types lors de situations grises comme l'expérimentation à partir de cas particuliers ou de représentants de classes d'objets, procédés courants chez l'élève. L'essai, la tentative, la modification, le remaniement ou le changement de stratégie caractérisent autant les moments de conjecture que les moments de preuve.

### **La notion de preuve**

Telle une thèse, nous croyons qu'il n'existe pas de définition universelle de la preuve en mathématique. Sans chercher à épuiser le sujet, retenons la définition socioculturelle de Balacheff (1987) ou celle, quoique formulée indirectement, de Hanna (1991). Bien qu'il en existe des définitions structurelles dans les systèmes formels (v. g. en logique mathématique ou en algorithmique), on convient généralement qu'en mathématique, le flux des idées et leur acceptation sociale a souvent plus d'autorité que les documents formels (Thurston, 1996). Du point de vue épistémologique, on reconnaît déjà que la démonstration intervient lors de situation de validation d'exigence supérieure et qu'elle requiert une certaine maîtrise du raisonnement déductif. D'aucuns considèrent la démonstration comme une preuve de haut niveau. Peut-on réellement l'appliquer avant un apprentissage du raisonnement déductif? Puisque la toile de fond de notre étude se glisse sur les preuves inadmissibles, nous reléguons au second plan la question de la validité et nous cherchons plutôt à diagnostiquer «ce que l'élève sait faire» en vue de développer sa compétence déductive. Ainsi, nous situons la preuve dans une perspective situationnelle: celle-ci consisterait en un raisonnement produit

en situation de validation-conviction, même si, en tant que preuve, elle paraît naïve, incomplète ou fautive au regard des méthodes mathématiques.

### **Champ proceptuel, procepts géométriques**

Dans ses nombreuses publications relatives à l'apprentissage du calcul, Tall (v. g. 1991) propose la notion de procept pour l'inclusion des procédures dans la conceptualisation. En ce qui concerne la géométrie, la relation intime que celle-ci partage avec la démonstration suscite l'expansion du champ conceptuel (Vergnaud, 1990) au champ proceptuel par l'ajout, à notre avis indissociable, des procédures extrinsèques et intrinsèques relatives à la visualisation, à l'interprétation ou à la validation. Par exemple, en géométrie métrique: la conceptualisation d'une droite fait intervenir le déplacement pour visualiser le prolongement sans fin; celle du losange se lie par sa définition, ses propriétés caractéristiques et leur démonstration, qui peut introduire, en plus des démarches déductives, des méthodes algébriques. Hormis en situation de contemplation, le concept ne coïncide pas avec une figure pétrifiée, figée dans un même état ou purement involutive, sans être conditionné par une demande ou sans découler de transformations. Par surcroît, si on amplifie le point de vue strictement géométrique, la conceptualisation dépend non seulement des nouveaux concepts propres à chaque géométrie, mais aussi de leurs procédures de validation, susceptibles d'incorporer des méthodes analytiques ou infinitésimales. Ceci établit une filiation réciproque entre un concept et ses procédures associées.

Dans cet esprit, le procept géométrique s'apparente au concept figuratif<sup>1</sup> de Fischbein (1993), en autant que cette réalité (abstraite) s'attache au domaine d'interprétation théorique duquel il est issu. Idéalement, toute preuve chemine dans un champ proceptuel relatif à la conjecture. Toutefois, cela suppose que c'est la géométrie (euclidienne) qui est à la fois le domaine de réalité, au sens de Laborde (1994), et la théorie représentante. Ceci, avant d'examiner les preuves inadmissibles, nous oblige à séparer l'univers de l'élève de l'univers théorique selon le lieu dans lequel les procepts se forment, la signification des procepts, les relations intraproceptuelles et les relations interproceptuelles, comme on l'indique dans le tableau ci-dessous.

Lieu dans lequel se forment les procepts	Domaine de réalité de l'élève	Domaine de réalité théorique
Signification des procepts	Modèle (implicite) de l'élève	Théorie représentante
Relations intraproceptuelles	Formation d'un «procept effectif»	Formation du procept théorique
Relations interproceptuelles	Pas de raisonnement (Duvall 1991, 1995)	Déduction

Par exemple, le domaine de réalité de l'élève peut être le dessin d'un losange attaché au contexte particulier d'un problème et qu'il sait reconnaître parce qu'il ressemble morphologiquement à un carreau. Le raisonnement intervient aussi bien dans les relations intraproceptuelles qu'interproceptuelles. Dans le premier cas, c'est lui qui contrôle la

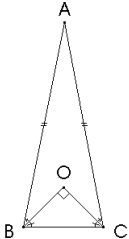
formation cohérente du procept. En principe, avant d'amorcer une preuve, la proceptualisation est déjà consommée, sauf si la preuve constitue en soi un apprentissage et permet d'affiner un procept existant. Dans le second cas et en situation de validation, le raisonnement permet de relier des procepts qui s'associent entre-eux pour les besoins d'un moment de conjecture ou d'un moment de preuve.

### Analyse discursive

Du point de vue fonctionnel, Duval (1991, 1995) considère que le raisonnement verbal enchaîne des unités discursives selon des modalités propres au deux plan du discours (argumentatif, déductif). À partir des formes du raisonnement, nous décomposons la structure discursive des preuves produites (reproductions 1.0 à 4.0) pour constituer leur schéma discursif (schémas 1.1 à 4.1). Auparavant, nous présentons la première situation-problème (page suivante), donnée aux élèves **A** et **B** (14-15 ans, issus de l'enseignement secondaire obligatoire — Généralité de la Catalogne) dans l'environnement papier-crayon. Elle se montre en trois parties: contexte, choix de la conjecture et demande de preuve. Le contexte présente deux domaines de réalité, la situation stricte et un dessin, qui obligent d'amorcer les moments de preuve et de conjecture à partir d'une situation impossible, réfutable par la mise en confrontation de l'hypothèse [BO) \_ [CO) avec les autres.

Le texte de la première solution (élève **A**) figure à la reproduction 1.0 et le diagramme 1.1 synthétise son organisation discursive. On y distingue trois «chaînes de raison». Nous calquons l'expression de

<sup>1</sup> Réalité mentale construite par le raisonnement mathématique en géométrie.

<b>Situation-problème 1</b>	
<p>Voici une <b>situation</b>:</p> <p>«Dans un triangle ABC isocèle en A on considère les bissectrices des angles à la base qui se coupent à angle droit en O.»</p>	<p>Voici un <b>dessin</b>:</p> 
<p>On veut déterminer la nature du triangle BOC.</p> <p><b>Choisissez</b> la ou les bonnes réponses en cochant dans la ou les cases appropriées:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Avec ce qui est donné dans la situation il est impossible de construire un tel triangle.</li> <li><input type="checkbox"/> Triangle isocèle.</li> <li><input type="checkbox"/> Triangle équilatéral.</li> <li><input type="checkbox"/> Triangle rectangle.</li> <li><input type="checkbox"/> Aucune des réponses précédentes.</li> </ul>	
<p>On veut que vous expliquiez votre ou vos réponses.</p> <p><b>Expliquez</b> votre choix de réponse(s) avec des arguments qui pourraient convaincre votre Descartes<sup>2</sup> de manière à éviter toute spéculation entre les unités discursives qui montrent une indépendance de fait par absence de connecteur logique, de conjonction ou de locution conjonctive, de signe de ponctuation, de tracé significatif quelconque, de lien thématique ou contextuel immédiat. Dans cette solution, on retrouve les trois types d'inférences de Duval. Puisque le triangle n'existe pas et que sa conjecture est «triangle rectangle isocèle», il est probable que le domaine</p>	

<sup>2</sup> Discours de la méthode.

de réalité est le dessin et qu'il n'a confronté que localement les hypothèses de la situation stricte. Ainsi, la première chaîne de raison se base sur une association sémantique entre les verbes «voir» et «savoir», tandis que la deuxième chaîne de raison construit une inférence discursive à partir d'une propriété spatiale du dessin. La troisième chaîne de raison représente une déduction. Tout d'abord, en mentionnant «dans l'introduction», on sait que l'élève tire l'hypothèse de l'angle droit, non pas du dessin, mais bien de la situation stricte. Ensuite, une fois l'antécédent satisfait, il formule en modus ponens la définition du triangle rectangle pour conclure. Le mot barré ressemble à un «obligatoirement» tronqué ou à l'amorce d'un dérivé du verbe «obliger», ce qui suggère une intention initiale de marquer une distinction entre la justification et le conséquent. S'il a finalement rectifié, c'est peut-être parce qu'il a jugé que, de toute manière, ceci n'engendrait pas d'ambiguïté.

Le texte de la deuxième solution (élève **B**) se trouve à la reproduction 2.0 et le schéma discursif correspondant, au diagramme 2.1. Celui-ci ne comprend qu'une seule chaîne de raison. Au premier paragraphe, après l'énoncé de la conjecture définitive, l'élève affiche une déduction presque canonique où l'on retrouve, dans l'ordre, l'antécédent, le conséquent et la justification. Il confond certes la bissectrice de l'angle  $\sphericalangle B$  avec la mesure de l'angle  $\sphericalangle OBC$ , mais ceci n'altère en rien la nature déductive de l'inférence. Au deuxième paragraphe, il fait allusion à une propriété caractéristique du triangle isocèle pour déduire que «l'angle B est égal à l'angle C». Ensuite, par l'énoncé «comme on avait dit», il récupère

Preuve de la situation-problème 1, élève A

On peut savoir que le triangle ~~est~~ BOC est isocèle, premièrement, parce qu'on le voit dans le dessin mais, en plus, si on coupe le triangle ABC en deux par les points A et O, ça nous ~~se~~ ~~coincide~~: ça coupe aussi par la moitié le triangle BOC. Alors, si le triangle ~~est~~ ABC est isocèle, le triangle BOC est isocèle aussi.

En plus, dans l'introduction on dit que les bissectrices des angles à la base se coupent à angle droit ~~en O~~

Par conséquent, si dans un triangle il y a un des angles qui est ~~de~~ de  $90^\circ$ , le triangle est ~~oblique~~ rectangle.

Reproduction 1.0

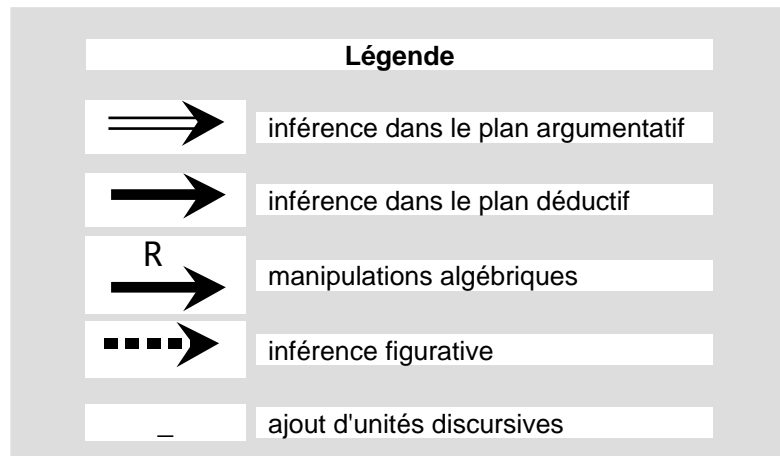


Schéma discursif de la reproduction 1.0

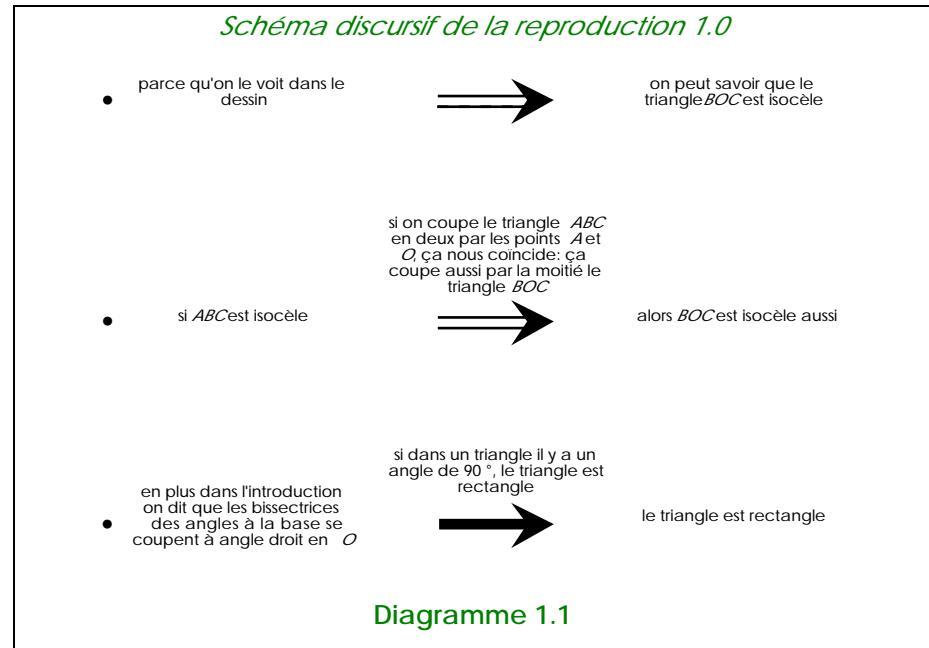


Diagramme 1.1

Canevas de la contexture stratégique de la reproduction 1.0

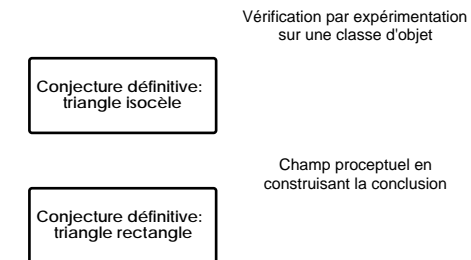


Diagramme 1.2

Preuve de la situation-problème 1, élève B

La construction de cette figure est impossible, car si l'angle O est  $90^\circ$ , alors la bissectrice de l'angle B plus la bissectrice de l'angle C doit être  $90^\circ$ , car la somme tous les angles d'un triangle est toujours  $180^\circ$ .

Si ABC est un triangle isocèle, alors l'angle B est égal à l'angle C. Comme en avait dit,

$$\frac{B}{2} = 45^\circ \text{ donc } B = 90^\circ$$

$$\frac{C}{2} = 45^\circ \text{ donc } C = 90^\circ$$

Si la somme des angles d'un triangle est  $180^\circ$ , alors :

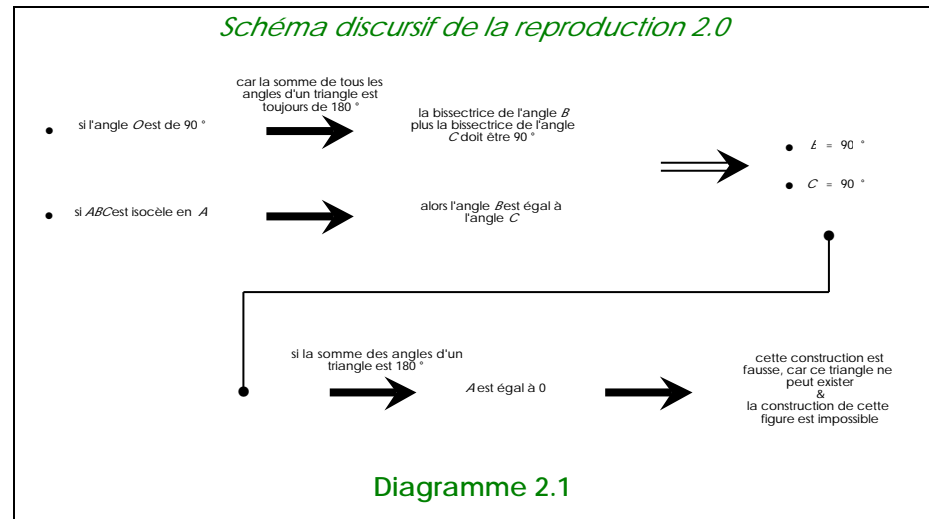
$$A + B + C = 180$$

$$A + 90^\circ + 90^\circ = 180. \text{ Donc } A \text{ est égal à zéro}$$

Si A est égal à ~~zéro~~, ce triangle n'existe pas. Cette construction est fautive, car ce triangle ne peut pas exister.

Reproduction 2.0

Schéma discursif de la reproduction 2.0



Canevas de la contexture stratégique de la reproduction 2.0

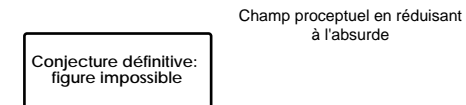


Diagramme 2.2

le conséquent de la première inférence pour avancer que les angles  $\_B$  et  $\_C$  mesurent chacun  $90^\circ$ . Cette fois-ci, il ne peut s'agir d'une déduction qui invoquerait une macropropriété<sup>3</sup>: soit qu'il s'est trompé entre le fait que les angles  $\_OBC$  et  $\_OCB$  sont complémentaires, et le fait que chacun mesure  $45^\circ$ ; soit que l'usage de ses symboles signifie une association sémantique parmi la complémentarité des angles  $\_OBC$  et  $\_OCB$ , et le caractère supplémentaire des angles bissectés. De toute façon, puisque l'argument arrive à point, il peut poursuivre en déduisant, selon une propriété caractéristique du triangle, que la mesure de l'angle  $\_A$  vaut zéro dans l'intention d'achever en s'appuyant sur le principe du tiers exclu.

### Stratégie de preuve

Une preuve écrite pendant une durée limitée ne manifeste pas que le produit fini du processus de réflexion. Bien au contraire, la preuve dévoile aussi la démarche et la stratégie qui l'accompagnent. Cette dernière repose sur l'ensemble des méthodes disponibles et jugées nécessaires, ainsi que sur les décisions prises dans les moments de preuve en fonction des hypothèses et des autres éléments contextuels de la situation traitée. La stratégie est à même de varier considérablement d'une situation à l'autre, au fur et à mesure des exigences, ce qui implique que la stratégie peut comprendre des décisions locales qui touchent à des

sous-stratégies. L'analyse d'une preuve revient alors à déterminer la nature de toutes les stratégies élémentaires qui se joignent par concaténation, chevauchement ou traitement simultané. Cet assemblage des stratégies élémentaires forme la texture stratégique et représente un niveau de structure différent de l'organisation discursive. Dans cette optique, il faut distinguer la conjecture globale initiale de possibles refontes, de même que des sous-conjectures locales qui se posent pendant la procédure de preuve ou qui sont issues par fragmentation de la conjecture. On considère qu'une conjecture ou une sous-conjecture est naïve si elle ne se contrôle pas par un raisonnement discursif et apparaît antérieurement à tout moment de preuve. Par exemple, le style de la première situation-problème favorise, mais sans la forcer, une conjecture initiale naïve qui déclenche la preuve. Une stratégie élémentaire de preuve suit toujours une conjecture ou une sous-conjecture, mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie: certaines d'entre elles peuvent être, en cours de route, abandonnées totalement ou partiellement, exclues du contexte, mises de côté temporairement, invalidées, ajustées, améliorées, ou acceptées directement à cause d'un fort degré de conviction qui les accompagne ou de leur trivialité apparente. Une fois démontrée, la conjecture devient une propriété<sup>4</sup>, la sous-conjecture, un lemme.

Nous proposons des stratégies élémentaires de preuve organisées en quatre groupes. Dans l'ensemble, ils s'appliquent aussi

---

<sup>3</sup> La macropropriété intervient lorsqu'une suite de déductions semble évidente dans un contexte donné ou que l'on doit la répéter à plus d'une reprise, en se permettant de passer directement à des propositions qui jouent le rôle d'antécédents à d'autres qui jouent le rôle de conséquents, sans prendre la peine d'exhiber de chemin déductif. Si son application donne l'impression d'être consciente et a l'air de correspondre à une préoccupation, il est question d'un lemme; sinon, c'est un saut déductif non déterminé.

bien aux procédures de preuve authentique qu'aux procédures impossibles. Dans ce qui suit, le mot conjecture représente indistinctement conjecture ou sous-conjecture, sauf mention contraire.

### *Vérification par expérimentation, généralisation*

Pour chaque éventualité de ce groupe, la certitude se fonde sur l'expérimentation de l'effet de la conjecture ou de l'impossibilité de sa négation par l'exemple, suivi d'une généralisation de la méthode ou d'un processus inférentiel qui rappelle l'induction naïve:

- vérification par un ou des cas particuliers;
- vérification par un ou des cas particuliers choisis d'une façon aussi quelconque que possible;
- vérification par un ou des représentants de cas particuliers;
- vérification par une ou des classes d'objets;
- vérification par un ou des procepts.

Soulignons que l'expérience consiste en une vérification dont l'objectif est de prouver, contrairement à l'observation de régularités, de constats perceptifs ou d'anticipations théoriques en vue de formuler une conjecture.

### *Analyse descriptive, étalement proceptuel*

Dans ce groupe, il s'agit de représenter, de dépeindre ou de détailler des caractéristiques:

- de la conjecture;
- d'une procédure de preuve qui semble coller à la conjecture;
- de connaissances qui gardent un rapport avec les procepts relatifs à la conjecture;

sans référence explicite aux conditions précises de la situation-problème. Le développement discursif s'exprime en termes descriptifs de surface et se situe au-dessus du contexte particulier. Il peut ne pas y avoir de raisonnement.

### *Chemin dans un champ proceptuel*

Le champ proceptuel comporte des sommets — les procepts — et des relations entre ceux-ci — les pas de raisonnement. Les sommets sont des propositions, et les relations, des définitions, des propriétés caractéristiques ou des macropropriétés connues ou intuitives. Pour appartenir à ce groupe, la stratégie consiste à choisir un chemin dans un champ proceptuel qui concerne la situation-problème:

---

<sup>4</sup> Si l'objectif d'une activité consiste à prouver une propriété caractéristique ou institutionnelle, on accorde à celle-ci un statut de conjecture opérationnelle, ce qui la place, dans l'intention, au début de la procédure de preuve.

- en construisant la conclusion à partir des hypothèses de la conjecture ou de transhypothèses<sup>5</sup>;
- en procédant par contraposition logique;
- en procédant par réduction à l'absurde;
- en supposant le problème résolu pour remonter aux hypothèses ou à des transhypothèses — à la manière d'un détective —, jouant sur les équivalences logiques;
- en raisonnant par récurrence.

Les calculs algébriques font partie de ce groupe.

#### *Entreprise d'une dialectique du contre-exemple*

Ce groupe reprend le patron heuristique de Lakatos (1986) et l'application didactique que lui a donnée Balacheff (1987). Ici, nous adaptons la dialectique du contre-exemple pour les situations de validation-conviction en fonction de l'effet du contre-exemple, suivant qu'il rejaille sur la conjecture, la preuve, les connaissances, le discours, ou sur lui-même:

- invalidation de la conjecture, globale ou locale (sous-conjecture);
- invalidation et reconstruction de la preuve par changement de stratégie élémentaire, par approfondissement de la procédure ou par développement d'un lemme;

---

<sup>5</sup> Il s'agit de conséquents déduits à partir d'hypothèses suivant une macropropriété, mais qui conserve un statut d'hypothèse à cause d'un fort degré de conviction attachée à sa véracité.

- invalidation et reconstruction des connaissances par redéfinition, réduction ou extension de concepts, ou par augmentation du contenu;
- invalidation et réorganisation du discours par rejet d'arguments heuristiques, par accroissement de la rigueur logique, ou par délaissement, incorporation ou amplification du langage fonctionnel;
- invalidation du contre-exemple par exclusion ou ajustement, ou par traitement comme un cas pathologique.

Pour relever la structure stratégique, nous formons le canevas de la texture stratégique. Dans le cas de l'élève **A** (diagramme 1.2), les mots soulignés nous orientent rapidement: la conjecture définitive sur la nature du triangle BOC se partage de façon indépendante entre «isocèle» et «rectangle». Pour expliquer que BOC est isocèle, il construit empiriquement une propriété qui fait allusion à l'axe de symétrie du triangle ABC. En guise de justification, il évoque explicitement le dessin, et ses références touchent au contexte précis de la situation-problème. Il vérifie alors l'effet de sa conjecture sur le dessin particulier, qui joue le rôle d'une classe d'objet: si cela fonctionne pour ABC, cela fonctionne pour BOC. Cette entreprise s'attache donc à une vérification par expérimentation suivie d'une généralisation. Ensuite, il se sert d'une seconde stratégie pour expliquer que le triangle BOC est aussi rectangle. Si la conjecture est fautive, c'est parce que l'hypothèse «les bissectrices des angles à la base se coupent à angle droit en O» n'a pas été confrontée à l'autre hypothèse de la situation stricte. Ceci se condamne en terme de qualité,

notamment au niveau de la stabilité<sup>6</sup>, mais non en terme de stratégie. La transparence du raisonnement et l'énoncé «si dans un triangle il y a un des angles qui est de  $90^\circ$ , le triangle est rectangle» poussent à la reconnaissance d'un chemin dans un champ proceptuel qui construit la conclusion directement à partir de l'hypothèse précédente.

À l'inverse de la solution précédente, l'élève **B** entreprend sa preuve en affirmant que la construction de la figure est impossible. Il procède en démontrant que les hypothèses de la situation stricte, dont «ABC est un triangle isocèle en A» devancé d'un «si», engendrent la non-existence du triangle ABC. Dans ce cas, le canevas du diagramme 2.2 présente une contexture stratégique formée d'une seule stratégie élémentaire de preuve. L'élève prend un chemin dans un champ proceptuel, où l'origine se compose des hypothèses et la destination de la mesure nulle de l'angle A, en réduisant à l'absurde. On remarque que tout à la fin, la rature laisse supposer qu'il voulait terminer par la non-existence du triangle, mais qu'il s'est repris en concluant «cette construction est fausse» pour mettre en évidence le caractère irréalisable de la figure.

### Qualité d'une preuve

Évaluer une preuve à brûle-pourpoint n'est pas une tâche commode. La remarquable diversité des raisonnements et des stratégies invite déjà à une analyse de ses caractéristiques intrinsèques et contextuelles. En général, toute demande de preuve demeure insuffisante

pour garantir la validation: le contenu particulier de la situation-problème, l'imposition spécifique d'un niveau de validation-conviction<sup>7</sup>, la préparation orale préalable au passage d'un questionnaire et le style de celui-ci influencent inévitablement la qualité des preuves. De plus, l'évaluation d'une preuve implique une discrimination à la hauteur de la cohérence externe. En termes absolus, cela signifie qu'il faut vérifier le degré de ressemblance avec des méthodes de référence ou de l'accomplissement à des objectifs convenus d'avance. En termes relatifs, puisque entre l'intention et le résultat, il subsiste toujours une marge difficile à prévoir, et ce, malgré les précautions, la comparaison horizontale de preuves entre elles protège la connexité globale de l'analyse. L'élève ne réalise jamais qu'une seule preuve dans ses cours et il n'est jamais seul à la réaliser. L'adoption d'indicateurs de qualité doit pour le moins refléter la marque du:

- suffisamment précis pour rendre compte de l'état d'une preuve, de sa justesse vis-à-vis de la conjecture ou du processus de validation, de son aptitude à convaincre et de son rapport avec les coutumes mathématiques;
- convenablement souple pour pouvoir respecter différents niveaux de validation-conviction, les impondérables contextuels et la cohérence externe relative.

Avant un apprentissage de la syntaxe déductive et parce que le discours argumentatif apparaît comme le terrain privilégié où devraient

<sup>6</sup> On en reparlera au paragraphe *Qualité d'une preuve*.

<sup>7</sup> Par exemple, selon l'échelle suivante: i) la preuve convainc l'élève-auteur; ii) la preuve convainc un camarade de classe étranger à la production; iii) la preuve convainc le

circuler les preuves, il faut bien sûr lui consacrer une attention particulière et envisager l'inclusion de critères qui minimisent l'interprétation. Cependant, à cause d'une forte proportion de la composante sémantique, il semble nécessaire de faire entrer pour l'évaluation une certaine subjectivité qui invoque le caractère de vraisemblance entre arguments. Dans la même veine, même si nous nous attendons à de très rares excursions dans le plan déductif, nous devons tout de même le prendre en compte pour deux raisons autres que la cohérence dialectique. Tout d'abord, il faut convenir d'une référence pour la reconnaissance d'indices de déduction dans les textes. Ensuite, nous voulons maintenir des critères récupérables pour évaluer une progression vers la démonstration et le discours déductif, après enseignement. Toutes ces raisons nous ont poussé à retenir les cinq indicateurs de qualité suivants.

### *La cohérence*

Les conjectures et les sous-conjectures jalonnent le processus de preuve. Si on dissèque le corps d'une preuve depuis ces points de repère, on est capable d'identifier chaque stratégie élémentaire déployée. Dans celles-ci interviennent indubitablement le raisonnement, constitué par une progression d'unités discursives. Leur cohérence structurale indique alors celle de la preuve. En ce sens, la cohérence apparaît comme une mesure interne et locale de l'harmonie, de la liaison nécessaire entre toutes les unités discursives.

---

professeur; iv) la preuve convainc une personne qui n'est pas nécessairement familière avec ce genre de problème.

Pour vérifier la cohérence, on se lance dans la construction d'un schéma discursif. Celui-là doit contenir l'enchaînement de toutes les unités discursives de la preuve, agencées suivant les structures inférentielles possibles. À partir du schéma, on contrôle la validité ou la pertinence de chaque inférence<sup>8</sup>: on obtient ainsi une mesure de la cohérence partielle. La cohérence totale de la preuve résulte de l'attribution d'une moyenne à la somme des cohérences partielles. Nous traitons la question des inférences de type inductif à l'échelle de la stabilité.

### *La stabilité*

L'énonciation d'un problème en mathématique se conçoit communément sur le modèle:

Étant donné «les hypothèses de la situation»,  
établir «la conjecture»

qui colle également quand se présente une sous-conjecture. En principe, les hypothèses de la situation alimentent le dessein d'atteindre l'énoncé de la conjecture. Or, l'intention se matérialise dans le raisonnement et la contexture stratégique. La stabilité de la preuve s'adresse à la constance de l'intention-réalisation dans les stratégies élémentaires, à la continuité de la contexture stratégique et à l'affinité entre les inférences. La stabilité se dévoile alors comme une mesure interne mais globale de la suite dans les idées.

Pour vérifier la stabilité, on forme d'abord le canevas de la contexture stratégique, dans lequel on place les conjectures, les sous-conjectures et les stratégies élémentaires susceptibles de les suivre, que l'on raccorde ensuite au schéma discursif. Au sein de chaque stratégie élémentaire, on scrute la validité ou la pertinence de l'enchaînement des inférences de même que la tendance à établir la sous-conjecture. Dans la contexture stratégique, on examine le rapprochement entre la conjecture définitive et les hypothèses de la situation, de même que l'obéissance de la continuité thématique développée à la conjecture attendue. Quant aux opérations par induction naïve ou en raisonnant par récurrence, puisque nous les considérons comme des stratégies élémentaires, leur rapport dans la preuve s'évalue telles qu'elles.

*La clarté*

Une procédure donnée peut s'avérer raisonnablement cohérente, convenablement stable, tout en demeurant nébuleuse. Si les deux premiers indicateurs marquent une valeur rattachée à la structure, la clarté se montre en qualité stylistique. Idéalement, la preuve doit être succinte, claire et précise, de façon à ne laisser planer aucun doute sur son interprétation, au regard du contexte d'énonciation. En ce sens, une preuve est claire si elle convainc facilement du bien fondé de la conjecture ou de sa vérité. En guise de critère opérationnel selon chaque plan du discours:

<i>Plan argumentatif</i>	<i>Plan déductif</i>
CLARTÉ	
<ul style="list-style-type: none"> <li>On regarde si la preuve est facile à comprendre, transparente, sans équivoque; si elle fait ressortir les idées principales; si elle se montre précise, sans considérations superflues; si elle se trouve articulée de telle manière qu'une personne étrangère à la résolution, mais familière avec le sujet d'étude, puisse l'accepter sans deviner.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Une preuve est claire lorsque la vérité de l'ensemble des déductions est assurée sans pour autant en noyer la compréhension dans un excès de déductions accessoires ou évidentes dans le contexte d'énonciation. Les déductions clefs peuvent être mises en évidence par l'introduction de macropropriétés.</li> </ul>

Parce que la clarté d'une preuve invoque une manière d'utiliser les moyens d'expression du raisonnement propre à l'élève, son évaluation paraît à première vue complètement subjective. Toutefois, le caractère dialogique du plan argumentatif permet de simuler la facilité d'entendement pour autrui. La clarté dépasse de la sorte la certitude tout individuelle pour l'appliquer à une communauté. Quant au plan déductif, il nous semble que la clarté ne peut pas s'exprimer qu'en fonction de seuls critères logiques, sinon en termes de raccourcis inférentiels qui respectent les principes du discours tout en soulignant les étapes jugées essentielles à la bonne compréhension.

*L'intérêt*

Si les trois premiers indicateurs embrassent amplement l'évaluation d'une preuve, ils ne peuvent rendre compte à eux seuls de celles qui apparaissent en poncifs, courtes et plates. En guise de référence absolue, une preuve intéressante est celle qui est digne d'attention, importante, originale, qui répond à une forte attente, qui

<sup>8</sup> Il s'agit bien sûr de l'inférence sémantique, de l'inférence discursive et de la déduction.

engendre des implications dans d'autres domaines, qui s'inscrit dans une dialectique de la systématisation ou qui satisfait des considérations d'ordre esthétique, voire qui revêt une certaine élégance. Mais les situations de validation provoquées habituellement en classe n'incitent pas à l'émergence de telles preuves. C'est pourquoi nous considérons l'intérêt comme une mesure de l'importance relative des conséquences didactiques de la preuve ou de la texture stratégique. Ceci signifie qu'une preuve est intéressante: si elle fournit une méthode applicable à d'autres preuves ou réutilisable en résolution de problèmes; si elle fait remarquer un aspect explicatif qui permet d'en comprendre le pourquoi, qui touche du doigt l'essence même de la conjecture et qui assure profondément la conviction.

### *L'authenticité*

Les habitudes didactiques ne rencontrent pas toujours les coutumes mathématiques. Cependant, retrouve-t-on dans les preuves des éléments de convergence? À notre avis, l'authenticité s'évalue tant par la forme que par le contenu. Au niveau sémantique, on escompte une preuve dont la véracité, la vérité ou l'exactitude ne peut être contestée par l'expert. Au niveau syntaxique, on s'attend à une preuve qui émane de la nature profonde des mathématiques, qui obéit aux canons démonstratifs. Encore une fois, cette exigence semble trop élevée pour les preuves réalisées avant un enseignement spécifique sur des procédures de preuve reconnues. Nous disons qu'une preuve est authentique si elle contient les idées clefs, et si la texture stratégique s'apparente à une procédure de preuve institutionnelle.

Même si dans l'administration d'un cours, le rapprochement de l'ensemble des preuves d'une situation donnée demeure indispensable, nous illustrons l'application des indicateurs de qualité en comparant les reproductions 1.0 et 2.0. En termes de cohérence, le schéma discursif de (1.0) montre une déduction en bonne et due forme, mais les rapports sémantiques à l'intérieur des deux premières chaînes de raison demeurent fragiles. À l'inverse, dans (2.0), les quatre déductions sont quasiment de forme canonique. Néanmoins, on saisit mal la justification qui permet d'avancer que les angles  $\_B$  et  $\_C$  mesurent chacun  $90^\circ$ . Par rapport à la stabilité, la troisième chaîne de raison de (1.0) justifie à point nommé l'origine de l'angle droit, mais l'absence de confrontation des hypothèses entre elles suggère la réflexion qui procède localement. Il semble d'ailleurs que l'élève cherche à valider en fixant des moments de raisonnement visuel. Dans (2.0), l'obéissance de la continuité thématique développée à la conjecture attendue est assez bonne mais la reprise par la proposition «comme on avait dit» abîme la connexité dans l'intention d'unir les hypothèses à la conjecture. Pour la clarté, l'ambiguïté d'acception du verbe «voir», la redondance des deux premières chaînes de raison et la composition maladroite de la justification de l'inférence discursive gênent la compréhension dans (1.0). Par contre, (2.0) reste assez transparente et plutôt efficace, mais, malgré tout, l'anomalie au sein de la cohérence et de la stabilité (au deuxième paragraphe) limite la fluidité d'entendement. L'erreur sur la conjecture et la fonction capitale du dessin de la situation-problème dans le raisonnement sanctionne tout de suite l'intérêt et l'authenticité de (1.0). Au contraire, malgré les travers de la cohérence et de la stabilité, nous ne pouvons que qualifier (2.0)

d'intéressante étant donnée la portée notoire des preuves qui procèdent par réduction à l'absurde, d'autant plus qu'elles sont inusitées à cet âge. Quant à l'authenticité de cette preuve, la confrontation de toutes les hypothèses, qui débouche d'abord sur la nullité de l'angle  $\_A$  pour conclure ensuite que la figure est impossible, contient en soi toutes les idées clefs; la texture stratégique s'approche remarquablement d'une procédure institutionnelle — chemin dans un champ proceptuel.

### Émergence de l'inférence figurative

Dans les moments de conjecture et les moments de preuve, les processus de figuration, d'interprétation et le raisonnement s'interpénètrent à tel point qu'il devient difficile d'identifier quand et comment ils interviennent. D'une part, on sait bien que le raisonnement en géométrie ne porte pas seulement sur des mots ni sur des symboles, mais aussi sur des dessins et des images visuelles (images mentales). D'autre part, si Duval (1991, 1995) distingue le raisonnement verbal du non-verbal, il ne considère pas la possibilité que ce dernier puisse s'incorporer à égalité de statut aux formes du raisonnement discursif. Or, l'analyse structurale de preuves inadmissibles montre que l'élève se sert d'un troisième type d'inférence à partir du registre sémiotique de la figure géométrique. À de sujet, examinons deux exemples issus d'environnements distincts.

À partir d'une deuxième situation-problème (page suivante) qui, en premier lieu, donne une esquisse de manière à éviter la réflexion immédiate appuyée par une évidence visuelle et qui, en second lieu, favorise le développement d'images cinétiques au sens de Presmeg

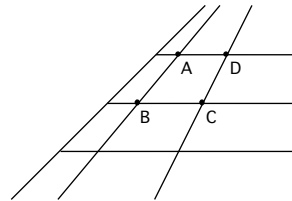
(1986), on découvre que certains élèves décident de faire participer activement des dessins dans le développement de leur preuve. Ainsi, dans la reproduction 3.0 (élève **C**), comment pourrait-on justifier l'inférence qui produit «on peut seulement placer: AB, BD et CD (mais pas sa mesure)» à partir de «avec ce qu'on a» si ce n'est que par le dessin  $\_?$  Et dans le passage de la proposition «on ne peut pas le construire» à «il pourrait être un carré ou un trapèze», pourrait-on accepter l'inférence si l'on cachait la bande dessinée  $\_?$  Dans chaque cas, nous établissons que le dessin  $\_?$  et la bande dessinée  $\_?$  s'incorporent à la structure discursive de la preuve au même titre que les propositions verbales, par adjonction du raisonnement graphique au raisonnement discursif.

D'une troisième situation-problème (page postérieure) dont la conjecture naît cette fois par action-rétroaction à partir du Cabri-géomètre, nous retrouvons avantageusement le même type d'inférence dans toute la structure discursivo-graphique (!) d'une preuve écrite (reproduction 4.0). De façon paradigmatique, l'élève **D** cause ou justifie chaque pas de raisonnement à l'aide de dessins (voir diagramme 4.1). Étant donné l'analogie avec le fait de rendre visible un idéal géométrique, nous appelons ce pas de raisonnement une inférence figurative. S'agit-il d'une réponse visuelle à une impasse argumentative ou d'une stratégie visant à servir le développement discursif?

Savoir discerner de façon sûre quand l'usage de l'inférence figurative marque la volonté de l'expression concise ou quand elle trahit une limite discursive demeure une tâche délicate et parfois non concluante. L'identification d'une inférence figurative se produit lorsqu'il

### Situation-problème 2

Pour paver le plancher d'une navette spatiale en construction à l'aide de tuiles identiques, le docteur Vavite a rendu au responsable du projet une esquisse avec des indications et, ensuite, est parti en vacances pour deux semaines dans le Grand Nord.



- INDICATIONS  
 ->1000 tuiles;  
 ->Pour chaque tuile:
- $AB = BC = 30$  cm
  - $(AB) \parallel (DC)$
  - $(AB) \perp (BC)$  et  $(BC) \perp (CD)$

Parce que chaque tuile doit être fabriquée avec une grande précision, que les matériaux et le coût de production sont très élevés et que le travail doit être terminé au plus tard dans une semaine, le responsable du projet doit s'assurer à tout prix de la nature du quadrilatère ABCD, sans pouvoir compter sur une aide éventuelle du docteur Vavite.

On veut aider le responsable du projet à déterminer la nature de ABCD.

Choisissez la ou les bonnes réponses en cochant dans la ou les cases appropriées:

- Avec ce qui est donné dans les indications il est impossible de construire un tel quadrilatère.
- Trapèze.
- Parallélogramme.
- Rectangle.
- Losange.
- Carré.
- Aucune des réponses précédentes.

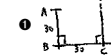
On veut s'assurer à tout prix que la ou les réponses données sont valables.

Donnez une explication qui permet d'être complètement sûr de votre ou vos réponses.

### Preuve de la situation-problème 2, élève C

C'est impossible de construire tel quadrilatère avec les indications données.

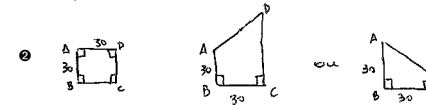
Avec ce qu'on a, on peut seulement ~~faire~~ placer:  $AB, BC$  et  $CD$  (mais pas sa mesure)



Pour

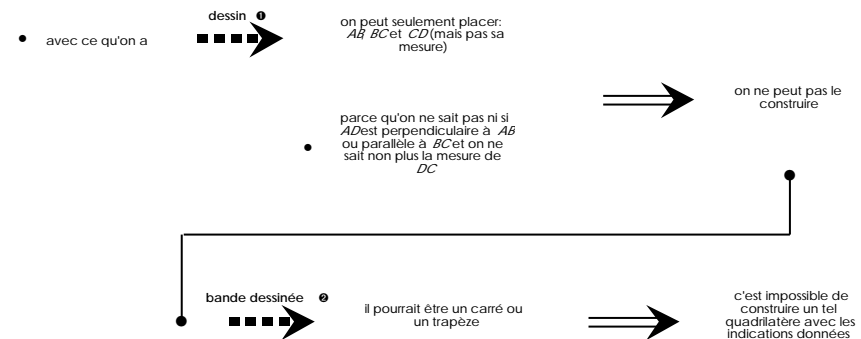
On ne peut pas le construire parce que on ne sait pas si  $AD$  est perpendiculaire à  $AB$  ou parallèle à  $BC$  et on ne sait plus la mesure de  $DC$ .

Il pourrait être un carré ou un trapèze :



### Reproduction 3.0

#### Schéma discursivo-graphique de la reproduction 3.0

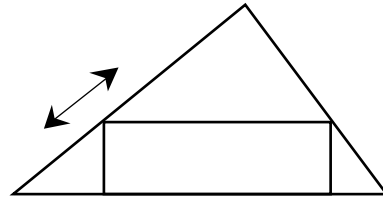


### Diagramme 3.1

Preuve de la situation-problème 3, élève D

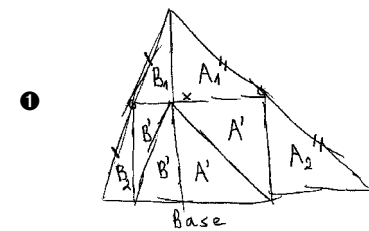
Situation-problème 3

- Tracer un triangle quelconque, en plaçant sur la feuille un côté à l'horizontale.
- Y inscrire un rectangle de manière à ce qu'une base du rectangle coïncide avec le côté à l'horizontale du triangle.



- Ainsi, le sommet du rectangle qui se trouve en haut à gauche peut se déplacer sur le côté gauche du triangle.
- On veut situer le sommet précédent, sur le côté du triangle, pour que l'aire du rectangle soit maximale.

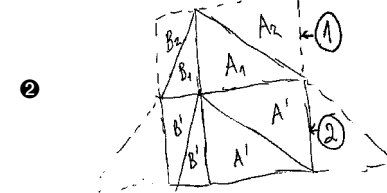
Quand, pour construire le rectangle, on prend des points milieux des côtés, on trouve que,



$0 < x < \text{Base}$   
 Pour  $x=0$ , aire=0.  
 Pour  $x=\text{Base}$ , aire=0.

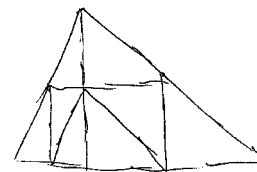
deux types différents de triangles se forment. (A et B)  
 Dans cette situation, en plus,

$$B' + B'' + A' + A'' = A_1 + A_2 + B_1 + B_2$$



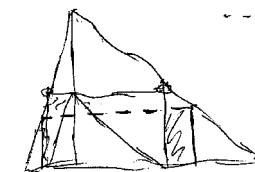
Aire rectangle  
 " "  
 $\frac{1}{2}$  Aire Triangle

Situation antérieure



3

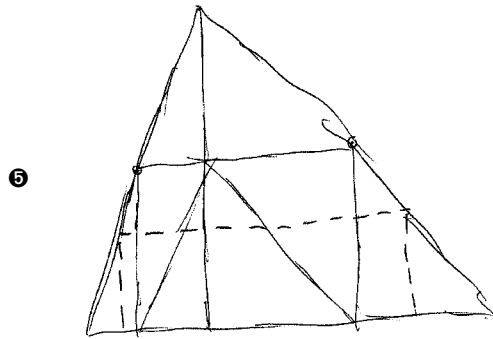
Quand  $x \rightarrow \text{Base}$



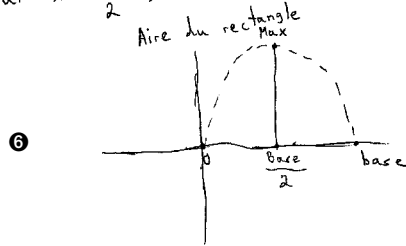
--- nouvelle base du rectangle

4

Suite page suivante



5  
 lorsque  $x$  tend vers  $0$  ou lorsque  $x$  tend vers base on observe que l'aire du rectangle diminue tandis que l'aire du reste du triangle augmente.  
 (pour  $x = \frac{\text{base}}{2}$ , ces deux aires étaient égales)



Reproduction 4.0

Schéma discursivo-graphique de la reproduction 4.0

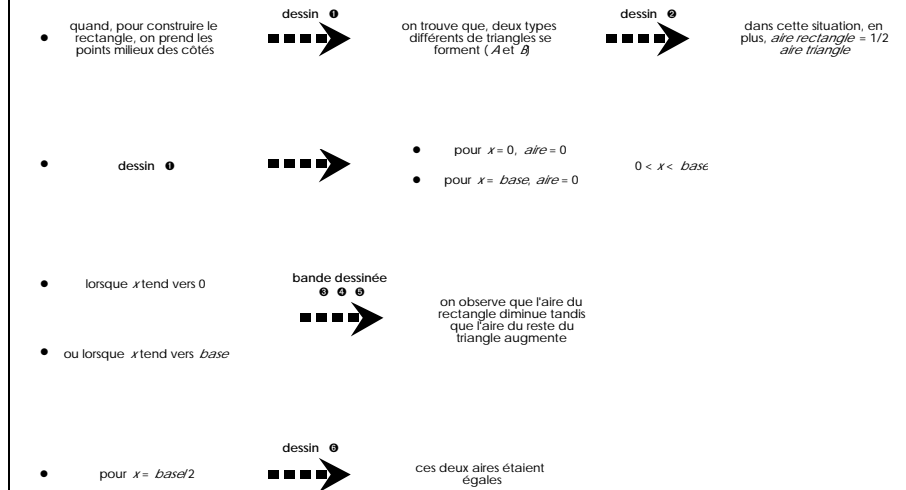


Diagramme 4.1

est impossible de saisir localement le raisonnement en masquant le dessin, même si on tente simultanément de rapprocher la proposition verbale inférée de la continuité thématique développée dans la preuve. De par nature, cela entraîne que la justification de l'inférence repose avant tout sur les possibilités de l'interprétation sémiotique d'un dessin à caractère géométrique. Dans ce dernier, les unités signifiantes sont les signes élémentaires (comme le tracé d'un segment pour représenter une droite) qui se raccordent d'abord en syntagmes graphiques (v. g. le petit carré posé à l'intersection de deux segments pour signifier deux droites perpendiculaires), et ensuite à l'intérieur d'une proposition graphique (v. g. le dessin d'un trapèze rectangle) ou d'un assemblage de propositions graphiques (v. g. un dessin complet). De plus, il faut savoir si le sens de la proposition verbale inférée adhère au domaine d'interprétation ou au domaine de fonctionnement attaché aux propositions graphiques de la justification — comme dans la distinction entre le dessin et la figure de Laborde et Capponi (1994) ou dans l'interprétation de la représentation graphique d'une fonction. Car, suivant la cohérence, l'évaluation de la qualité de l'inférence y est soumise.

En prévision d'une initiation aux preuves authentiques ou à une introduction au raisonnement déductif, il faut comprendre pourquoi l'élève aurait besoin de ce type d'inférence puisqu'en leur absence, le raisonnement ne tient plus. À notre avis, le fond du sujet rejoint le passage d'une géométrie pratique à une géométrie toute théorique. Parce que l'élève ne peut travailler qu'avec les moyens dont il dispose et que ceux-ci naissent autant d'un apprentissage historique que d'une aptitude

innée mais évolutive, il traîne forcément des habitudes relatives à la mathématique élémentaire en voie de transformation progressive. Dans cette optique, l'application d'inférences figuratives intervient d'abord en approche conciliatoire entre l'obligation tacite de prouver verbalement et la capacité réelle de raisonner sur des propositions verbales. Mais en même temps, l'utilisation de l'inférence figurative se maintient en moyen efficace et constructif qui donne à la preuve le pouvoir de suivre son cours, sans se doubler de l'exigence qui consisterait à verbaliser conjointement plusieurs propositions graphiques avec leur enchaînement.

En fait, il est légitime de se demander, à l'entendement de l'élève, pourquoi il faudrait s'efforcer de scinder le raisonnement si on peut représenter et motiver, en un tour de main, tout le nécessaire pour introduire ce qui apparaît évident. L'inférence figurative permet autant d'accentuer la transparence du raisonnement que de couper court à la rédaction. Du reste, l'inférence figurative vient souvent secourir la cohésion de la preuve parce que le dessin prétend exhiber ce qu'il perçoit et c'est exactement ce dont il a besoin pour justifier l'étape du raisonnement en question. Puisqu'il est fréquent, dans la réalisation d'une preuve, qu'on tente de reproduire le raisonnement qui a permis de déterminer la conjecture, l'inférence figurative jette une passerelle entre le moment de la conjecture et celui de la preuve, tout en adoucissant la composition du texte puisque la linéarité temporelle de sa rédaction demande un effort supplémentaire et approprié d'organisation discursive.

D'un point de vue théorique, force est de constater que l'ajout de l'inférence figurative à celles des plans du discours engendre un ensemble

d'inférences consistant avec la définition fonctionnelle du raisonnement de Duval (1995), substituant l'unité sémantique «la forme d'expansion discursive» par «la forme d'expansion discursivo-graphique». Cela élargit l'emprise de sa définition, sans en changer ni l'esprit, ni l'intention. Même si le raisonnement graphique n'a pas l'habitude de se découvrir formellement dans les démonstrations géométriques, il demeure profitable pour modifier la valeur épistémique qu'a l'énoncé-cible d'un raisonnement dans un état de connaissance donné, ou dans un milieu social donné. Par exemple:

- dans les «monstrations» chinoises de l'Antiquité (Martzloff, 1990) pour augmenter le degré de fiabilité qu'avait la communauté d'antan sur des propriétés alors vérifiées uniquement par des cas particuliers;
- dans l'argument visuel de Sipka (1988) employé en classe pour renforcer la conviction sur l'égalité de Pythagore, en la présentant comme la loi du cosinus appliquée à un angle droit.

En outre, l'engouement suscité par les raisonnements visuels depuis plusieurs années — revues de la MAA<sup>9</sup>, ouvrage de Nelsen (1993), pour ne nommer que ceux-là — ne correspond pas qu'à une mode passagère sinon à un intérêt proprement didactique qui oblige le lecteur à produire une suite d'inférences figuratives. Bien sûr, ces raisonnements ne pourront jamais modifier la valeur de vérité d'une conjecture. Cependant, dans la dialectique beaucoup plus modeste et contraignante

d'une situation d'apprentissage, faut-il punir systématiquement l'usage d'inférences figuratives dans des preuves qui montrent que, malgré tout, l'élève procède à partir de propriétés caractéristiques de procepts géométriques? Ou, au contraire, faut-il les approuver sous certaines conditions? Parce que non seulement elles sont conséquentes avec la connaissance discursive de l'élève et les possibilités du plan argumentatif, mais aussi parce qu'elles demeurent particulièrement efficaces en situation d'enseignement..

S'il est vrai que durant une activité qui réclame une valeur épistémique élevée l'inférence figurative ne cesse de pécher en rigueur, la plupart des raisonnements qui se présentent dans la continuité d'un cours se situent entre la validation et l'auto-conviction, entre la rigueur et l'efficacité de Balacheff (1987). Déjà, pour le professeur, de nombreuses situations sollicitent l'adhésion de la classe sans que ce soit nécessaire de produire une preuve exclusivement verbale, là où les gestes corporels mêmes participent avantageusement au raisonnement. Pour l'élève, le raisonnement intervient aussi bien dans le contrôle des connaissances que dans l'acceptation d'un énoncé, de la compréhension de son sens, de son interprétation théorique, de sa justification didactique, etc. Avec une classe donnée, la validité de ces inférences doit plutôt s'examiner dans l'adéquation avec les propriétés caractéristiques des procepts géométriques qui sous-tendent le raisonnement graphique et, de façon plus générale, dans la concordance avec l'ensemble des connaissances reconnues comme vraies par le groupe.

---

<sup>9</sup> Par exemple, *The College Mathematics Journal* de la *Mathematical Association of America*.

Dans une civilisation de l'instantanéité et de l'image, il faut quand même se mettre à l'abri des abus du raisonnement graphique. Bien qu'il encourage le développement du raisonnement intuitif, si important dans la résolution de problème et la formulation de conjecture, il risque à la longue d'annihiler l'essence même d'une démarche de preuve en occasionnant des problèmes de structure; tout comme celui de ne plus être forcé de commencer à construire le raisonnement depuis le début, ou l'inférence à partir d'énoncés admis antérieurement. L'inférence figurative est utile dans la mesure où sa compréhension est une question de décodage de signes en relation avec le domaine d'interprétation géométrique, et non d'images. Si on peut déterminer sa valeur par recoupement<sup>10</sup>, son profit demeure subordonné à la qualité du reste du raisonnement verbal, si ce n'est davantage. Néanmoins, lorsque l'inférence figurative intervient dans la continuité thématique d'un texte ou lors d'un débat oral, elle demeure plus structurée qu'un raisonnement graphique qui tourne en exclusivité, puisqu'elle raccorde les propositions graphiques à au moins une proposition verbale (l'antécédent ou le conséquent de l'inférence).

### Conséquences pour l'enseignement

Au seuil d'une étude de figures géométriques, l'enseignant doit cerner les contraintes qui marquent l'espace disponible en situation de validation-conviction, que ce soit pour approprier les activités

d'apprentissages ou pour orienter les tâches d'évaluation. Puisque c'est lors de la préparation d'unités didactiques ou de la concrétisation en classe d'objectifs pédagogiques que la nature précise de ces contraintes peut se révéler, l'analyse structurelle et qualitative de preuves permet d'évaluer l'état actuel d'une classe en relation avec le raisonnement, la stratégie et la proceptualisation — la capacité de raisonner sur une figure se conjuguent aux modèles proceptuels déjà établis.

Fischbein (1982) propose que l'activité cognitive de l'élève fait appel à l'intuition, dans une démarche empirique asymétrique à celle d'une logique formelle. À la manière des élèves **A** et **D** respectivement, nombreux sont ceux qui tentent de prouver en vérifiant par expérimentation sur une classe d'objets (le dessin vu comme un représentant) ou sur des procepts. Positivement, de telles dispositions favorisent l'organisation discursivo-graphique qui l'emporte sur des habitudes proprement descriptives. Mais si pour l'élève **D** ce sont des procepts qui soutiennent le raisonnement et que la stratégie semble volontaire, nous estimons que pour l'élève **A** l'interprétation des propriétés géométriques se fonde encore sur la perception sensorielle, déclassant toute possibilité de prospecter dans champ proceptuel convenablement constitué. Peut-on réellement se passer d'un enseignement sur le fonctionnement des plans du discours et de leurs exigences distinctives si la qualité de la proceptualisation géométrique et si l'arsenal des stratégies de preuve disponibles risquent d'en subir les conséquences?

Une maîtrise minimale de la syntaxe déductive demeure profitable pour la bonne marche didactique. Parce qu'elle affecte aussi bien le

---

<sup>10</sup> Concordance des caractéristiques sémiotiques du dessin avec le domaine d'interprétation théorique et rapprochement entre la ou les propositions verbales et la proposition graphique appropriée.

processus de dévolution d'une propriété, qui aspire à la pleine appropriation d'un concept, qu'au développement d'une heuristique de résolution de problèmes, à la formulation de conjectures qui précède une démarche de preuve, au contrôle personnel de connaissances mathématiques, à la compréhension syntaxique d'un énoncé, de son sens, de son interprétation théorique, de sa justification historique, didactique, etc. Sinon, outre les problèmes de scrupule mathématique, d'insuffisance épistémologique, d'incomplétude logique et de proceptualisation fragmentaire, l'incompétence sur le raisonnement déductif risque à la longue de créer un obstacle didactique, plaçant l'élève dans une position trop asymétrique face au professeur, réduisant, dans l'étude de figures géométriques, la réalisation de preuves authentiques à un exercice foncièrement algébrique. Sans compter qu'il faudrait alors consentir à l'usage des preuves expérimentales.

À notre avis, l'interpénétration entre les phénomènes de proceptualisation et les processus de preuve ne peut qu'appuyer l'intérêt considérable qui devrait être accordé aux situations de validation-conviction en général, quoique de façon progressive dans toute l'étape de l'enseignement secondaire. En guise de recommandations pour l'enseignant, nous considérons qu'il faut:

- Diagnostiquer les habiletés acquises en situation de validation-conviction avant de systématiser l'étude de procédures de preuves institutionnelles. Les indicateurs de qualité sont utiles pour évaluer la progression de l'élève et pour accommoder les situations d'enseignement-apprentissage en fonction des résultats obtenus.

- Éveiller la conscience sur l'existence de la structure et des fonctions du raisonnement et de la stratégie. Insister sur la distinction entre un raisonnement et une preuve authentique et séparer les failles de raisonnement des failles de stratégie.
- Assurer la conviction raisonnable sur la conjecture avant toute situation de validation. Dans le cas d'un exercice de géométrie pratiqué en groupe, favoriser le débat à partir d'un dessin ou d'une représentation gestuelle (v. g. se promener sur le quadrillage du plancher pour simuler une translation de vecteur). Lors d'un moment de conjecture, contrôler les relations avec le domaine d'interprétation théorique (v. g. en questionnant les intervenants lorsque c'est le professeur qui anime le débat) et compléter éventuellement la discussion par la rédaction d'une preuve qui naît d'un consensus. Dans tous les cas, approprier l'exigence de preuve selon le niveau de validation-conviction ambitionné.
- Programmer des situations de validation-conviction qui encouragent en soi le besoin de preuve et garantissent l'emploi de la démonstration dans les situations qui requièrent un niveau de validation élevé. De plus, même en l'absence d'un dispositif qui permet d'animer un dessin, prévoir des activités dirigées qui favorisent le développement d'images visuelles cinétiques ou dynamiques durant le moment de la conjecture et qui, en contrecoup, nécessitent une preuve pour assurer la conjecture.
- Inciter à l'usage de preuves structurées, notamment dans les débats oraux, et encourager les preuves dont la stratégie chemine dans un champ proceptuel. Cela demande un apprentissage

spécifique sur le statut opératoire des définitions et des propriétés caractéristiques de même qu'un contrôle sur l'emploi de transhypothèses et de macropropriétés.

- Distinguer expressément les moments de conjecture des moments de preuve. Dans le premier cas, stimuler l'usage de la pensée brouillonne, souscrire à l'intérêt de la «pratique expérimentale» et développer des heuristiques de résolution de problèmes; dans le second cas, préconiser la composition de preuves structurées, défendre l'avantage de la «pratique démonstrative» et proposer des méthodes de rédaction.
- Tolérer les inférences figuratives qui s'attachent au domaine d'interprétation théorique, obligeant à un contrôle sur la signification des signes employés, surtout lorsqu'elles permettent une économie de moyens (par exemple, si l'on cherche à concentrer l'attention dans le cœur d'un problème ou sur l'essentiel d'un aspect théorique, ou s'il s'agit de contribuer à la clarté d'une preuve, sans que cela comporte une perte au niveau de la cohérence ou de la stabilité). De plus, l'inférence figurative doit être valorisée lorsque l'objectif d'un moment d'apprentissage vise à structurer la visualisation d'un concept ou s'il s'agit de développer la pensée intuitive.

## Conclusion

La décomposition de preuves selon leurs caractéristiques discursivo-graphiques et stratégiques procure un profit certain. En regard

du contenu, elle nous a permis d'identifier un type d'inférence (inférence figurative) qui sort du cadre proprement discursif mais qui s'y greffe structurellement. Sans nécessairement traduire une insuffisance discursive, l'inférence figurative concède un pas de raisonnement sans avoir à tenter de contrepartie verbale. En relation avec l'aspect instrumental, la nature et l'organisation des éléments de références et des points de comparaison permettent non seulement de jeter la lumière sur des preuves écrites, mais, par surcroît, nous les considérons récupérables pour rendre compte d'une évolution après enseignement. Autant ils respectent ce que fait l'élève (en termes de raisonnement et de stratégie) et la signification des signes qu'il utilise (syntagme graphique, syntagme verbal, ...), autant ils souscrivent au rapprochement à l'idéal didactique (chemin dans un champ conceptuel, compétence déductive).

Du point de vue méthodologique, l'outil d'analyse développé assure l'objectivité du fondement de l'étude et, par conséquent, minimise l'interprétation pour mesurer la qualité d'une preuve. De plus, nous croyons qu'il incarne l'échafaudage d'un diagnostic sur les preuves en analyse où, par exemple, les inférences figuratives sont susceptibles de se produire avec la représentation graphique d'une fonction — à la manière de l'élève **D** —, ou pour les moments de preuve qui deviennent nécessaires dans les situations de formulation (d'une conjecture). Au besoin, il faudrait certainement, dans le premier cas, ajuster les éléments de référence et les points de comparaison, comme la ventilation des critères relatifs aux manipulations algébriques ou aux diverses représentations d'une fonction; dans le second cas, mettre l'accent sur

la dialectique du contre-exemple en insistant sur la différence entre les conjectures primitive, intermédiaire et définitive.

À dessein de diagnostiquer des habiletés acquises sur la base de textes, notre étude ne contribue pas à élucider la question du processus d'acquisition, ni l'influence de l'interaction sociale. Toutefois, nous suggérons, en premier lieu, que notre outil d'analyse débouche sur l'étude d'une évolution du raisonnement et des stratégies de preuve lorsque l'intention didactique prétend se rapprocher des coutumes mathématiques, et de mesurer le progrès effectif, sur la proceptualisation en géométrie, d'un enseignement intégré du raisonnement déductif. En second lieu, le diagnostic devrait se transposer aux situations de validation non écrites, comme celles qui naissent au cours d'un débat oral ou qui favorisent l'échange collectif. Dans ces cas, la réalisation de preuves est susceptible d'embrasser la dialectique du contre-exemple et, de la sorte, livrer toute la quête d'une procédure de preuve. Du reste, une telle disposition pourrait s'ouvrir sur une étude comportementale en situation de validation-conviction.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

- Balacheff, N. (1987) Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176.
- Brousseau, G. (1981) Problèmes didactiques des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 37-127.
- Duval, R. (1991) Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 233-261.

- Duval, R. (1995) Chapitre 5: le raisonnement. *Sémiosis et pensée humaine: registre sémiotique et apprentissages intellectuels*, 209-316. Berne: Peter Lang.
- Fischbein, E. (1982) Initiation and Proof. *For the Learning of Mathematics*, 3(1), 9-18.
- Fischbein, E. (1993) The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.
- Hanna, J. (1991) Chapitre 4: Mathematical Proof. Dans David Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 54-61. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Laborde, C. (1994) Enseigner la géométrie: permanences et révolutions. *Actes du 7<sup>e</sup> Congrès international sur l'enseignement des mathématiques*, 47-75. Québec: Les Presses de l'Université Laval.
- Laborde, C. et Capponi, B. (1994) Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(1, 2), 165-210.
- Lakatos, I. (1986) *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Universidad.
- Martzloff, J.C. (1990) Quelques exemples de démonstration en mathématiques chinoises. *La démonstration mathématique dans l'histoire*, Actes du 7<sup>e</sup> colloque inter-IREM épistémologie et histoire des mathématiques, 131-153. Besançon et Lyon: IREM de Besançon et IREM de Lyon.
- Nelsen, R.B. (1993) *Proofs Without Words. Exercises in Visual Thinking*. Washington D.C.: The Mathematical Association of America.
- Presmeg, N.C. (1986) Visualization in High-school Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6, 42-46.
- Sipka, T.A. (1988) The Law of Cosines. *Mathematics Magazine*, 61 (4), 259.
- Tall, D. (1991) Intuition and Rigour: the Role of Visualization in the Calculus. Dans W. Zimmermann et S. Cunningham (Ed.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, 105-119. Providence, Rhode Island: MAA Notes Series, Vol. 19.
- Thurston, W. (1996) On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30(2), 161-177.
- Vergnaud, G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2, 3), 133-170.



