



Preuve

International Newsletter on the  
Teaching and Learning of  
Mathematical Proof

**La lettre de la Preuve  
Automne 2001**

Texte en ligne

Différents types d'argumentations mobilisés par des élèves tunisiens en début  
d'apprentissage de la démonstration

Haj Ali Najoua  
Institut supérieur d'éducation et de la formation continue  
Tunis

Publication originale :  
*Actes de la XI<sup>e</sup> école d'été de Didactique des Mathématiques.*  
Jean-Luc Dorier, éditeur.

**Editeur : Maria-Alessandra Mariotti**

*English Editor* : Virginia Warfield, *Editor en Castellano* : Patricio Herbst

*Redattore* : Bettina Pedemonte

*Advisory Board* : Nicolas Balacheff, Paolo Boero, Daniel Chazan, Raymond Duval, Gila Hanna, Guershon Harel, Celia Hoyles, Erika Melis, Michael Otte, Yasuhiro Sekiguchi, Michael de Villiers

## RESUME

L'originalité de l'enseignement des mathématiques en Tunisie tient au fait que cette activité prend successivement pour support la langue arabe littéraire différente de l'arabe parlé (arabe dialectal) puis la langue française. L'examen de la congruence de la langue arabe et la langue française en tant que registres sémiotiques nous a amené à mettre en évidence la non-congruence des deux langues. Cette non- congruence présumerait une complexité de traitement, de la part des élèves, dans une activité mathématique.

L'année de transition, de changement de langue (la 1<sup>ère</sup> année secondaire) représente aussi une année des premiers apprentissages de la démonstration. Ceci nous a incité à faire notre investigation dans ce niveau en proposant aux binômes objets de notre expérimentation une activité mathématique qui les appellerait à argumenter. L'analyse des corpus obtenus a mis en évidence des différences dans les traitements des élèves questionnés en français et ceux questionnés en arabe.

# INTRODUCTION

Dans notre travail de DEA nous avons évalué l'écart entre le discours naturel et le discours mathématique dans le cas de l'arabe tunisien et plus particulièrement nous avons mis en évidence les différents types d'argumentation qu'utilisent des élèves (14-15 ans) en début d'apprentissage de la démonstration dans une activité mathématique aussi bien en langue arabe qu'en langue française. Au cours de ce travail, nous avons été très vite amenée, en un premier temps, à étudier la congruence<sup>1</sup> de la langue arabe et la langue française, et en un second temps, à évaluer la possibilité de coordination pour un élève tunisien de première année secondaire entre les deux langues arabe et française. Dans le cadre de cet article, nous allons présenter quelques résultats de cette recherche et émettre des conjectures concernant les origines des argumentations repérées.

## I CONTEXTE DE L'ETUDE

L'originalité de l'enseignement des mathématiques<sup>2</sup> en Tunisie tient au fait que cette activité est d'abord initiée en langue arabe littéraire différente de l'arabe parlé (arabe dialectal). L'enseignement des mathématiques en langue arabe littérale est maintenu jusqu'à la 9<sup>ème</sup> année de base<sup>3</sup>. A partir de l'année qui suit l'enseignement se fait en langue française.

L'apprentissage de la démonstration commence à partir de la 7<sup>ème</sup> année de base<sup>4</sup>, pour devenir l'objectif principal de l'enseignement des mathématiques de la 1<sup>ère</sup> année secondaire<sup>5</sup>. Ainsi l'élève commence son apprentissage de la démonstration en langue arabe et l'approfondit dans une seconde étape en langue française.

Parallèlement et durant ces mêmes années de la 7<sup>ème</sup> année de base à la 1<sup>ère</sup> année secondaire, l'argumentation fait partie des cours de langue. Dans l'enseignement de la langue française, l'argumentation fait partie des cours de la 7<sup>ème</sup> année de base jusqu'à la 1<sup>ère</sup> année secondaire à travers l'activité d'expression écrite. Alors que pour l'enseignement de la langue arabe, l'argumentation est l'objet principal des cours de 9<sup>ème</sup> année de base uniquement, et ce à travers l'activité d'expression écrite.

En Tunisie, les mathématiques sont enseignées en langue arabe pendant les neuf années de l'école de base puis en langue française en classe de première année secondaire. Quelle influence, ce changement de la langue d'enseignement (de l'arabe au français) a-t-il sur l'apprentissage de la démonstration ? qui est l'un des objectifs de cette classe. Autrement dit un élève de 1<sup>ère</sup> année secondaire dispose de deux langues (arabe et français) (sinon quatre, chacune des langues dispose d'une version " discours naturel " et d'une version " discours mathématique ") pour l'apprentissage de la démonstration en mathématique. A la suite de ces enseignements, quel est le comportement oral des élèves lorsqu'ils sont placés devant une situation de preuve et/ou de réfutation ? Tel est l'objet qui nous occupera dans toute la suite de ce travail.

---

<sup>1</sup> Deux représentations sémiotiquement différentes (la langue arabe et la langue française sont deux registres sémiotiques différents) représentant au moins partiellement le même contenu sont dites congruentes lorsqu'il y a correspondance sémantique entre leurs unités signifiantes, univocité sémantique terminale et même ordre possible d'appréhension de ces unités dans les deux représentations. Lorsque deux représentations sont congruentes, le passage de l'une à l'autre se fait spontanément, sinon le passage n'est plus immédiat (Duval, 1995).

<sup>2</sup> L'enseignement des mathématiques en Tunisie est véhiculé par la langue arabe dans l'école de base (de la 1<sup>ère</sup> année jusqu'à la 9<sup>ème</sup> année de base) et en langue française à partir de la 1<sup>ère</sup> année secondaire.

<sup>3</sup> L'équivalent de la 4<sup>ème</sup> en France.

<sup>4</sup> L'équivalent de la 6<sup>ème</sup> en France.

<sup>5</sup> L'équivalent de la 3<sup>ème</sup> en France.

## II CADRE THEORIQUE

Le concept d'argumentation et les concepts de démonstration, preuve et réfutation sont très liés. Beaucoup de chercheurs dont des linguistes, psychologues, didacticiens des mathématiques et philosophes ont réfléchi sur ces termes. Parmi ces chercheurs nous retiendrons: Raymond Duval, pour qui le concept " Argumentation " n'a pas été facile à définir. Ce dernier, a montré qu'il y a rupture et continuité entre argumentation et démonstration, Nicolas Balacheff a construit une typologie de preuves et mis en évidence l'importance des relations entre connaissance et preuve dans l'activité mathématique des élèves. Christian Plantin qui, dans son livre " Essais sur l'argumentation ", a catégorisé cinq types d'argumentation. Enfin, Lakatos qui, dans son livre " Preuves et réfutations ", différencie deux types de contres-exemples et montre que la découverte mathématique est pilotée par la dialectique des preuves et réfutations.

Dans ce qui suit, nous allons commencer par exposer des travaux de certains de ces chercheurs concernant les concepts " argumentation ", " démonstration " et " preuve ", en essayant de mettre en évidence différentes relations entre ces concepts.

Certains types de preuves peuvent fonctionner comme des argumentations. Balacheff distingue quatre types de preuves qui interviennent dans l'apprentissage de la démonstration : l'empirisme naïf (c'est la généralisation après quelques cas), l'expérience cruciale (c'est la vérification sur un cas pour lequel " on ne fait pas de cadeau " en affirmant que si cela marche alors cela marchera toujours), l'exemple générique (c'est un objet qui représente une classe, et la vérification se fait sur un objet puis vient la généralisation) et l'expérience mentale (ce sont des opérations qu'il s'agit de réaliser par la pensée sur un représentant particulier). Les deux premières étant des preuves pragmatiques, la dernière une preuve intellectuelle et la troisième pouvant selon les situations compter pour une preuve intellectuelle ou pragmatique. Et c'est le passage du premier type au second qui est difficile pour les élèves (Balacheff, 1999). Ces preuves peuvent jouer le rôle d'arguments ; supports d'argumentations scientifiques (Arg 2)<sup>6</sup> au sens de Plantin. Nous reviendrons sur ce cas de figure au cours de notre travail.

Par ailleurs certains types d'argumentations jouent le rôle de preuves pour des élèves en début d'apprentissage de la démonstration. Ce qui n'est pas le cas pour la communauté mathématique. Cette dernière considère que l'argumentation est une forme d'expression du raisonnement acceptée. D'autre part la démonstration est une preuve pour la communauté mathématique, mais souvent elle ne fonctionne pas comme telle pour les élèves.

*“ Pour démontrer, les élèves seront amenés à faire une organisation déductive ce qui n'est pas évident pour les élèves : organisation déductive et argumentation constituent deux types de fonctionnements opposés du discours, par suite le passage de l'argumentation à la démonstration exige un changement d'attitude intellectuel complet et ce changement qui est difficile pour les élèves ”.* (Duval et Egret, 1989).

Duval schématise respectivement un pas de déduction dans une démonstration et un pas de raisonnement dans une argumentation par  $P : (\text{prémisse}) \vdash C : (\text{conclusion})$ , et ce qui permet de passer de  $P$  à  $C$ , l'énoncé tiers (que nous appellerons aussi loi de passage).

Dans un pas de déduction la (ou les) prémisse représente un énoncé qui peut être une hypothèse, un théorème, un axiome ou une déduction des énoncés qui précèdent selon une règle explicite et convenue par la communauté scientifique. Cette règle est appelée règle de

---

<sup>6</sup> Arg 2 est une argumentation qui fait usage du calcul et de l'expérience par laquelle on teste une hypothèse. (Plantin, 1990)

détachement ou encore règle du modus ponens, la loi de passage représente un théorème, axiome ou définition et C est la conclusion obtenue par substitution de la partie conséquence de la loi de passage. Ainsi, dans un pas de déduction, la justification porte sur le statut de la prémisse et de la loi de passage. Par contre, pour un pas de raisonnement dans une argumentation, la justification porte sur le contenu de la prémisse et de la loi de passage. D'où l'obligation de la compréhension des termes utilisés. D'autre part le terme "argumentation" est homonymique<sup>7</sup>. Plantin différencie plusieurs types d'argumentations que voici :

Arg 1 : “ *Les argumentations sont correctes ou incorrectes. Une argumentation correcte parvient à des conclusions vraies à partir de prémisses vraies et par un mode de déduction valide.* ” (Plantin, 1990,p. 151).

Arg 2 : “ *Une argumentation est une opération discursive, faisant également usage du calcul et de l'expérience par laquelle on teste une hypothèse* ”. (Plantin, 1990, p. 150)

Arg 3 : “ *L'argumentation est l'opération discursive par laquelle un locuteur cherche à faire admettre à son interlocuteur une conclusion substantielle en lui fournissant des bonnes raisons pour cela.* ” (Plantin, 1990, p. 150).C'est le modèle de Toulmin.

Arg 4 : “ *L'argumentation est l'opération discursive par laquelle un locuteur cherche à influencer un public* ” (Plantin, 1990, p. 149) (définition Perelmanienne)

C'est une argumentation selon le discours dont la norme est l'efficacité, il y a des critères qui permettent de hiérarchiser ce type d'argumentation selon que les argumentations induisent, réfutent ou stabilisent les convictions du locuteur. C'est l'argumentation rhétorique. Cette argumentation comporte trois ordres : ordre de force croissante (on commence par les arguments les plus faibles et on termine par les plus forts), ordre de force décroissante (on commence par les arguments les plus forts et on termine par les plus faibles) et ordre nestorien (où on commence et on termine par les arguments les plus forts en mettant les plus faibles au milieu).

Arg 5 : “ *L'argumentation est l'opération linguistique par laquelle un énonciateur avance un énoncé-argument dont la structure linguistique oriente le destinataire vers certains enchaînements* ”. (Plantin, 1990, p. 148)

Par ailleurs, qui dit argumentation dit existence d'un argument or un argument peut jouer le rôle d'un contre-argument. De plus comme un exemple est un argument dans certains cas, si un exemple est l'une des preuves pragmatiques alors le contre-exemple peut être un contre argument. Or, dans l'enseignement des langues, on réfute une thèse argumentée (un énoncé) en présentant des contre-arguments. Par suite la réfutation dans cet enseignement se fait par des contre-exemples. Ce qui n'est pas le cas en mathématique. En effet, la réfutation d'un énoncé mathématique se fait par un contre-exemple. En fait un contre-exemple peut ou bien jouer le rôle de preuve d'un énoncé faux, ou bien modifier l'énoncé (Lakatos, 1976).

Dans ce qui suit nous allons essayer de catégoriser les différents types d'argumentations.

---

<sup>7</sup> lorsqu'un mot a plusieurs significations radicalement différentes, il est dit homonymique.

### III PROPOSITION D'UNE NOUVELLE TYPOLOGIE DE L'ARGUMENTATION

Nous allons proposer une nouvelle typologie de l'argumentation en nous basant principalement sur les travaux de Balacheff (1999) et Plantin (1990). Précisons que les argumentations que nous allons catégoriser ne couvrent pas l'ensemble des argumentations. Nous avons choisi de ne considérer que celles auxquelles feront appel notre partie expérimentale. L'expérimentation est menée auprès d'élèves en classe de première année secondaire. L'expérimentation se déroule en deux phases ; une première où le binôme participant à l'expérimentation en français sont invités à répondre à l'exercice : " les hauteurs d'un triangle quelconque ont-elles toujours un point commun ?". Et ceux participant à l'expérimentation en arabe sont invités à répondre à l'exercice correspondant en arabe.

Et une deuxième phase où les binômes sont amenés à réfuter ou prouver une thèse. Ceci se produira à la suite de l'intervention de l'expérimentateur de par la présentation successive des différentes situations préparées sur un support papier qui vont agir sur le milieu. Chaque situation propose une représentation graphique associée à une affirmation.

A la fin de la première phase où les élèves auraient présenté un message comme réponse à l'exercice proposé succède une deuxième phase où l'observateur (moi) présentera successivement quelques-unes ou toutes les situations préparées. L'ordre de la présentation des situations dépend du déroulement de la première phase de l'expérimentation.

Les situations sont les suivantes :

*Dans le cas où la langue véhiculaire serait le français :*

Situation 1 : Triangle ayant un angle obtus avec traçage des trois hauteurs en trait plein (des segments) avec la mention : " Les hauteurs d'un triangle quelconque n'ont pas toujours un point commun".

Situation 2 : Triangle ayant un angle obtus avec traçage des trois hauteurs en trait plein (des segments) et traçage des trois droites qui portent les hauteurs en trait pointillé avec la mention " Les droites qui portent les hauteurs d'un triangle ont toujours un point commun "(cette situation permet de déceler la conception : la hauteur est un segment)".

Situation 3 : Triangle plat avec le traçage de trois perpendiculaires passant par trois points distincts du segment en trait pointillé et la mention " Les hauteurs d'un triangle n'ont pas toujours un point commun ".

Situation 4 : Triangle ayant un angle obtus avec traçage des trois hauteurs en trait plein (des droites) et la mention " Les hauteurs d'un triangle ont toujours un point commun ".

Situation 5 : Triangle ayant les trois angles aigus avec traçage des trois hauteurs en traits pointillés (des droites) et la mention " Les hauteurs d'un triangle ont toujours un point commun ".

Situation 6 : Triangle ayant un angle obtus avec traçage des trois hauteurs en trait plein (des segments) et traçage des trois droites qui portent les hauteurs en trait pointillé avec la mention " Les hauteurs d'un triangle quelconque ont toujours un point commun ".

*Dans le cas où la langue véhiculaire serait l'arabe :*

Les mêmes dessins accompagnés des mentions traduites en arabe.

Notons que l'exercice proposé fait appel à des concepts vagues : hauteur et triangle. A travers notre étude des manuels scolaires dédiés aux élèves objets de notre expérimentation, nous avons montré que la hauteur d'un triangle se rapporte au moins à trois référents : droite,



L'expression : “ Un contre-exemple suffit pour invalider (réfuter) un énoncé ” est un résultat admis implicitement par les mathématiciens. En fait, ce résultat trouve ses origines dans la logique du fait qu'un énoncé universellement quantifié est faux lorsqu'il possède au moins un contre exemple. En effet

$$\text{Non } (\forall x, p(x)) \{ \text{non } [1] \} \Leftrightarrow (\exists x, \text{non } (p(x))) \{ [2] \}.$$

Ainsi, [2] est vrai signifie que

{non [1]} est vrai

d'où

[1] est faux.

Quand la loi de passage est un théorème, définition, axiome ...ou un énoncé admis par la communauté mathématique tel que l'expression “ un contre exemple suffit pour invalider un énoncé ” et la donnée est une donnée admise par tous alors l'argumentation c'est Arg1 correcte au sens de Plantin . Nous distinguons deux types de Arg1 correcte :

Celle où la loi de passage est un théorème et c'est la démonstration que nous noterons Arg1 correcte démonstrative (c'est la déduction).

Nous pouvons illustrer notre propos par l'exemple suivant :

*Donnée* = (AB) // (CD) et (EF) // (CD)

*Conclusion* = (AB) // (EF)

*Loi de passage* = deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles.

Et celle où la loi de passage est un énoncé admis par la communauté mathématique par exemple la réfutation d'un énoncé que nous noterons Arg1 correcte réfutative. En voici un exemple illustratif

*Donnée* =  $\sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{25}$

*Conclusion* =  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$

*Loi de passage* = un contre exemple suffit pour invalider un énoncé.

Quand la loi de passage est un postulat, définition, axiome ... ou un énoncé admis par la communauté mathématique et la donnée est une donnée inventée. Par exemple, en supposant la négation de ce que nous voulons monter, nous allons considérer une donnée fautive puisque la négation d'une donnée vraie est une donnée fautive. Ainsi cette donnée va avoir le statut d'une donnée inventée par l'argumentateur. Alors l'argumentation c'est Arg1 incorrecte au sens de Plantin et c'est le raisonnement par l'absurde.

Ainsi, nous observons trois types d'argumentations formalisées : la démonstration en mathématique, la réfutation d'un énoncé mathématique et le raisonnement par l'absurde en mathématique.

#### Argumentations empiriques :

Quand la loi de passage est une expérience dont la norme est une vérité expérimentale et la donnée est une donnée admise par tous, alors l'argumentation est scientifique et c'est Arg2 au sens de Plantin. Nous distinguons quatre types d'argumentations empiriques. Une première dont la loi de passage est le constat graphique que nous notons Arg2 graphique ; la vérification de l'hypothèse (donnée) se fait par le constat graphique. Une deuxième dont la loi de passage est l'empirisme naïf que nous notons Arg2 s'appuyant sur l'empirisme naïf. Une

troisième dont la loi de passage est l'exemple générique que nous notons Arg2 s'appuyant sur l'exemple générique. Une dernière dont la loi de passage est l'expérience cruciale que nous notons Ar2 s'appuyant sur l'expérience cruciale.

Exemple d'une argumentation graphique :

*Donnée = triangle ayant un angle obtus et des hauteurs tracées.*

*Conclusion = les hauteurs du triangle ayant un angle obtus ont toujours un point commun.*

*Loi de passage : constat graphique.*

Argumentation s'appuyant sur un empirisme naïve : c'est une argumentation dont la loi de passage est " l'empirisme naïf " au sens de Balacheff et c'est la généralisation après la vérification sur quelques cas. Soit l'exemple suivant :

Exemple d'argumentation s'appuyant sur un empirisme naïf :

*Donnée = les hauteurs d'un triangle ayant des angles aigus ont toujours un point commun.*

*Conclusion = les hauteurs d'un triangle quelconque ont toujours un point commun.*

*Loi de passage : empirisme naïf.*

Argumentation s'appuyant sur une expérience cruciale : c'est une argumentation dont la loi de passage est " l'expérience cruciale " au sens de Balacheff ; c'est la vérification sur un cas sur lequel on ne fait pas de cadeau.

Exemple d'argumentation s'appuyant sur une expérience cruciale :

*Donnée = les hauteurs d'un triangle ayant un angle obtus ont toujours un point commun.*

*Conclusion = les hauteurs d'un triangle quelconque ont toujours un point commun.*

*Loi de passage : expérience cruciale*

Argumentation s'appuyant sur un exemple générique : c'est une argumentation dont la loi de passage est " l'exemple générique " au sens de Balacheff ; c'est un objet qui représente une classe et la vérification sur un objet vient après la généralisation.

Exemple d'argumentation s'appuyant sur un exemple générique :

*Donnée = les hauteurs d'un triangle ayant des angles aigus, ayant un angle obtus ou ayant un angle droit ont toujours un point commun.*

*Conclusion = les hauteurs d'un triangle quelconque ont toujours un point commun.*

*Loi de passage : expérience générique.*

Argumentations rhétoriques :

Quand la norme de la loi de passage est l'efficacité ou inexistante alors c'est l'argumentation rhétorique et c'est Arg4 au sens de Plantin. Nous distinguons au moins quatre types d'argumentation : l'argumentation d'autorité, l'argumentation rhétorique croissante, l'argumentation rhétorique décroissante et l'argumentation rhétorique nestorienne

Cette approche linguistique ne nous permet pas d'analyser un discours. Elle est insuffisante dans la mesure où la nature de la donnée (admise ou inventée) et la force d'un argument nous sont inconnus même après l'étude du champ conceptuel de l'élève. Pour remédier à cette difficulté une analyse de la progression du discours nous est nécessaire. Duval (1995, p. 122- 123- 124) distingue deux modes de progression de discours ; un premier mode dit " logique " et un deuxième mode dit " naturel ". Ces deux modes se différencient suivant qu'un énoncé est considéré suivant son statut ou son contenu. Il souligne que dans le premier mode la valeur épistémique est déterminée par le contexte. Par exemple dans Arg1 la nature de la donnée c'est la progression du discours qui va la déterminer.

Si la donnée est une donnée admise par tous alors cette argumentation est une argumentation correcte démonstrative. Et si la donnée est une donnée inventée par l'argumentateur alors cette argumentation est une argumentation1 incorrecte. Or la même donnée peut être ou bien une donnée admise par tous ou bien une donnée inventée par l'argumentateur. C'est le contexte qui le détermine.

Sachant que ces différents types d'argumentation sont objets d'enseignement aussi bien en langue arabe qu'en langue française nous avons été amenés à délimiter le champ conceptuel d'un élève de 1<sup>ère</sup> année secondaire concernant le concept " argumentation ". Une étude des différents manuels scolaires nous a permis d'observer des différences dans les enseignements, liés à ce concept, véhiculés par la langue arabe et ceux véhiculés par la langue française. Ceci, nous amène à nous poser la question : les élèves de la 1<sup>ère</sup> année secondaire ont-ils la capacité de coordonner les deux registres langue arabe et langue française ? Pour y répondre, il nous est nécessaire d'examiner la congruence de la langue arabe et la langue française. C'est l'objet chapitrée la section suivante.

#### IV EXAMEN DE LA CONGRUENCE DES LANGUES ARABE-FRANÇAIS

Nous savons qu'une langue obéit à des normes universelles concernant l'ordre des mots au sein de la phrase. En ce qui concerne la langue arabe l'ordre sur lequel tous les linguistes sont d'accord est V. S. O (V : verbe, S : sujet et O : objet), mais l'ordre S. V. O est acceptable seulement pour certains. Alors que pour la langue française n'est acceptable que l'ordre S. V. O.

Par suite si on ne considère que l'ordre nous pouvons supposer que la traduction d'une phrase de la langue française à la langue arabe est facile car l'ordre est maintenu. Par contre ce n'est pas toujours le cas pour la traduction de la langue arabe à la langue française. En effet, si la phrase en arabe est de la forme V. S. O alors la traduction n'est pas évidente car pour la traduction il faut qu'il y ait permutation des deux premières unités signifiantes. Deux schémas seraient envisageables :

Traitement <sup>8</sup>	Conversion <sup>9</sup>
V. S. O (arabe) _____	S. V. O (arabe) _____ S. V. O (français)
	Ordre maintenu (d'où éventuelle congruence)

Ou

---

<sup>8</sup> Un traitement est la transformation d'une représentation prise comme donnée initiale en une représentation considérée comme terminale par rapport à une question. [...] Un traitement est une transformation de représentation interne à un registre de représentation ou à un système. (Duval, 1995, p. 39)

<sup>9</sup> la conversion est la transformation de la représentation d'un objet, d'une situation ou d'une information donnée dans un registre en une représentation de ce même objet, de cette même situation ou de la même information dans un autre registre. (Duval, 1995, p. 40)

## Conversion

V. S. O (arabe) \_\_\_\_\_ S. V. O (français)

Ordre non maintenu (d'où non congruence)

Par ailleurs un élève de première année secondaire a en sa possession deux langues ; l'arabe et le français pour raisonner dans une activité mathématique d'où la question que nous nous posons de savoir comment cet élève organise la circulation des idées et la communication entre les deux langues dans le cadre d'une activité mathématique ? Sachant que chacune porte ses ambiguïtés et ses caractéristiques.

La langue arabe est un registre de représentation sémiotique, de même que la langue française en est un. Duval s'intéresse aux propriétés spécifiques aux changements de registre et définit trois critères qui doivent être vérifiés pour qu'il y ait congruence entre deux représentations sémiotiquement différentes et représentant au moins partiellement le même contenu.

- Correspondance sémantique entre les unités signifiantes.
- Univocité sémantique terminale.
- Même ordre possible d'appréhension de ces unités dans les deux représentations.

En consultant les manuels scolaires des mathématiques à l'usage des élèves pendant l'enseignement de base, nous remarquons la présence de théorèmes rédigés en arabe commençant par un verbe. Pour trouver le correspondant de ce théorème en langue française nous devons au moins permuter deux unités signifiantes. Ainsi, le théorème obtenu en langue française ne sera pas congruent à son précédent en langue arabe puisque le troisième critère de congruence ne sera pas vérifié. Par conséquent les textes appris par les élèves en langue arabe et leurs correspondants en langue française ne sont pas toujours congruents. Une question s'impose : les élèves questionnés pourront ils transformer les textes appris en langue arabe en des textes en langue française ? Duval précise que :

*“ En cas de non-congruence, la conversion des représentations n'est effectuable et compréhensible que par les sujets pour lesquels la coordination des registres de représentation s'est au moins en partie mise en place ” (Duval, 1995).*

De ceci découle la question : les élèves de la 1<sup>ère</sup> année secondaire ont ils eu un apprentissage de la coordination entre les deux registres : langue arabe-langue française ?

En examinant le cursus scolaire d'un élève de 1<sup>ère</sup> année secondaire, nous réalisons que :

- L'enseignement de la langue française se fait sans référence à la langue arabe.
- Un lexique français- arabe est prévu, à la fin du manuel scolaire destiné aux élèves de ce niveau. Mais, si ce lexique permet à un élève la compréhension de certains termes, il ne lui permettrait pas d'effectuer un traitement.
- Absence totale de tout enseignement de traduction (arabe- français et français- arabe).

Par conséquent, de droit, un élève de 1<sup>ère</sup> année secondaire n'a pas la capacité de coordonner entre les deux registres langue arabe et langue française. Or, Duval a montré que lorsque deux registres sémiotiques sont non congruents la conversion est difficile. Cette non-congruence aurait-elle une influence sur les productions des élèves ? Y' aurait- il des

différences entre les argumentations des élèves produites en langue arabe et celles produites en langue française ?

## V PARTIE EXPERIMENTALE

Dans cette partie nous allons présenter les considérations d'ordre méthodologique, l'échantillon choisi pour l'expérimentation, la situation de l'expérimentation, le déroulement de la pré- expérimentation et son apport, la méthodologie de recueil d'informations et enfin le déroulement de l'expérimentation.

Ce travail a consisté à mener des travaux par binôme auprès d'élèves de première année secondaire. Le travail par binôme a eu lieu au cours du mois de Mai 2000 dans un établissement de l'enseignement secondaire du gouvernorat de Tunis : lycée secondaire El Omran de Tunis se trouvant au centre ville.

Le choix des élèves devant participer à ce travail par binômes a été opéré avec la collaboration de leur enseignant de mathématiques, de la langue arabe et de la langue française de manière à avoir des élèves moyens dans ces trois disciplines.

Nous avons choisi de faire cette étude dans le cadre d'un enseignement des premiers apprentissages de la démonstration. Nous nous proposons de travailler avec des élèves de 1<sup>ère</sup> année secondaire. Nous avons opté pour que les élèves soient volontaires dans leur participation à l'expérimentation prévue. Notre travail est une étude qualitative qui consiste en l'analyse des productions orales d'élèves lors d'une activité mathématique.

Nous avons opté pour une situation où les élèves auraient à résoudre un problème, débattre entre eux et par la suite argumenter pour ou contre une solution. Pour mieux analyser les traitements d'informations des élèves, nous avons opté pour un travail sur des binômes.

*" Pour voir le caractère fondamental du discours, il ne faut plus envisager le discours en aval c'est-à-dire au niveau des discours et des textes déjà constitués mais en amont, lors de sa production par un locuteur" (Duval, 1995, p. 91).*

Les élèves seront subdivisés en binômes. Six binômes constitués par quatre binômes de filles et deux binômes de garçons. Deux binômes de filles et un binôme de garçons seront autorisés à discuter en langue arabe (binômes U, V et W). Deux binômes de filles et un binôme de garçons seront autorisés à discuter en langue française (binômes X, Y et Z). Chaque binôme est questionné à part. Comme l'expérimentation s'est produite dans un intervalle de dix jour<sup>10</sup> entre le premier et le dernier binôme, nous avons demandé à chaque binôme questionné de ne pas parler du contenu de l'expérimentation avec le reste des élèves du lycée tant que nous n'avons pas terminé de questionner les six binômes prévus. Nous leur avons expliqué que notre invite à la coopération a pour objectif la validité de l'expérimentation. Nous avons jugé utile de prendre cette précaution pour éliminer la variable " avoir connaissance des questions à l'avance ". Ce qui pourrait influencer le déroulement de l'expérimentation et éviter que certaines réponses soient spontanées alors que les autres seraient préparées à l'avance.

Les élèves questionnés ne disposent que d'un seul stylo, d'une seule règle, d'une seule équerre et d'autant de feuilles qu'ils veulent. Les binômes sont partagés en deux groupes ; le premier groupe est interrogé en langue française, alors que le second est interrogé en langue arabe.

En début de séance nous disons aux élèves :

---

<sup>10</sup> A cause de la contrainte de la disponibilité des élèves.

- Les binômes doivent communiquer dans la langue avec laquelle leur est présenté l'exercice.
- Le binôme est seul juge du temps qui lui est nécessaire pour résoudre l'exercice.
- Un binôme ne doit communiquer à l'expérimentateur que la réponse sur laquelle les deux élèves se sont mis d'accord.
- Le binôme ne peut pas poser de question ni à l'expérimentateur ni à l'observateur ; les deux élèves ne peuvent se concerter qu'entre eux.

L'expérimentation ne s'est pas déroulée de la même manière pour les six binômes. Par contre dans la présentation des différentes situations préparées il n'y a pas eu beaucoup de différences. En effet dans la deuxième phase nous n'avons présenté que les situations 1 et 3 (situation 1 puis situation 3) pour les deux premiers binômes, et les situations 1, 2 et 3 pour les quatre autres binômes. Par ailleurs nous n'avons pas eu besoin des situations 4, 5 et 6 pour atteindre les objectifs prévus : amener l'élève à dire oui et le justifier et dire non et le justifier. Ce déroulement était attendu à la suite des pré-expérimentations.

Le travail par binôme durait une heure environ. Les discussions des élèves étaient enregistrées puis, transcrites. Dans l'analyse des discours nous avons cherché les différentes argumentations utilisées. Nous avons essayé de déceler leurs éventuelles origines. Parallèlement, nous avons tenté de mettre en relation ces argumentations avec l'usage de l'une ou l'autre langue. C'est ce que nous proposons d'exposer maintenant.

## VI RESULTATS DE L'ETUDE

En étudiant les chapitres consacrés à "l'intersection des droites qui portent les hauteurs d'un triangle" faisant partie du cursus scolaire d'un élève de 1<sup>ère</sup> année secondaire nous avons remarqué que la caractéristique générique change d'un niveau à un autre. Ce changement s'accompagne avec un autre changement dans l'utilisation des figures. En 6<sup>ème</sup> année et 7<sup>ème</sup> année de base un objectif de la leçon qui intègre la notion citée ci-haut est de vérifier graphiquement l'existence et la nature<sup>11</sup> du point d'intersection des droites qui portent les hauteurs d'un triangle. Dans cette perspective le triangle générique est l'ensemble des triangles ayant un angle obtus, triangles ayant des angles aigus et triangles rectangles. Alors qu'en 9<sup>ème</sup> année de base un objectif de la partie concernée par cette notion est de montrer que les droites qui portent les hauteurs d'un triangle ont toujours un point commun, donc le triangle est utilisé comme support pour la présentation de la preuve, par suite le triangle ayant des angles aigus est considéré comme exemple générique. Précisons que la caractéristique générique n'a été institutionnalisée à aucun niveau.

Ainsi, dans notre analyse nous allons supposer que si l'élève utilise le graphique pour *vérifier* "l'existence de l'intersection des hauteurs d'un triangle" alors le triangle générique c'est l'ensemble des trois cas de figures : les triangles ayant un angle obtus, triangles ayant des angles aigus et triangles rectangles. Et, s'il omet l'un de ces trois cas de figures alors nous considérons que c'est un exemple naïf. Mais, si l'élève utilise le graphique comme support pour *montrer* que les hauteurs d'un triangle ont toujours un point commun, alors le triangle générique c'est "exactement" un triangle quelconque.

En prenant un énoncé à part nous ne pouvons déclarer à quel type d'argumentation il appartient sauf si on le remet dans son contexte. C'est pour cela que nous avons décidé de découper chaque corpus en fonction de l'introduction d'une nouvelle situation.

---

<sup>11</sup> Le point d'intersection des droites qui portent les hauteurs d'un triangle se trouve à l'intérieur du triangle ou à son extérieur ou encore le sommet du secteur droit.

Maintenant nous allons exposer l'analyse des corpus. Les analyses montrent la présence de preuves et de réfutations. Les élèves sont amenés successivement à prouver et réfuter un énoncé mathématique.

Notre première constatation est que tous les binômes interrogés, aussi bien en français qu'en arabe, ont conjecturé : « oui les hauteurs d'un triangle quelconque ont toujours un point commun ». Les argumentations que les binômes ont développées étaient toutes basées sur la vérification graphique de la présence du point d'intersection des hauteurs. Pour les binômes X, Y et Z questionnés en français, la vérification a été portée sur quelques cas de figures. Pour chacun des trois binômes les cas de figures ne couvrent pas l'ensemble des triangles aigus, triangles ayant un angle obtus et triangles rectangles. En effet, le binôme X a vérifié la conjecture sur un triangle équilatéral et un triangle rectangle puis il a généralisé. Le binôme Y a vérifié la conjecture sur un triangle isocèle et un triangle rectangle. Et, le binôme Z a vérifié la conjecture sur un triangle rectangle, un triangle isocèle, un triangle équilatéral et un triangle « quelconque » puis il a généralisé. Nous observons chez ces trois binômes des argumentations du type Arg 2 s'appuyant sur un empirisme naïf.

Ce même type d'argumentation nous le retrouvons chez le binôme U (questionné en arabe). En effet, il a généralisé après avoir vérifié la conjecture sur le cas du triangle rectangle et le triangle ayant des angles aigus. Cependant, le binôme W (questionné en arabe) a généralisé après avoir vérifié la conjecture sur un triangle rectangle, un triangle ayant des angles aigus, un triangle ayant un angle obtus, un triangle isocèle et un triangle équilatéral. Cette argumentation est du type Arg 2 s'appuyant sur un exemple générique.

Parallèlement, toujours dans la première phase, un des binômes interrogés en français (binôme Z) a utilisé l'argumentation rhétorique croissante et un autre binôme interrogé en arabe a utilisé l'argumentation nestorienne. Après avoir vérifié la conjecture sur des exemples, le binôme Z s'est appliqué à la recherche d'arguments plus forts : « donner des relations numériques », d'où le déclenchement d'une argumentation rhétorique croissante.

A ce niveau nous décelons un faible indice sur l'influence de l'une ou l'autre des langues sur le processus du raisonnement des élèves.

En analysant le corpus consacré à la deuxième phase nous constatons que pour les trois binômes questionnés en arabe, il est clair qu'un contre exemple suffit pour réfuter un énoncé mathématique. Alors que ce n'est pas le cas pour ceux questionnés en français.

Un élève du binôme X a tracé cinq triangles : un triangle équilatéral, un triangle isocèle, un triangle rectangle et deux triangles ayant des angles aigus non particuliers. Observons que dans le cas du triangle rectangle l'élève a tracé seulement une hauteur : celle qui passe par le sommet de l'angle droit. La hauteur que cet élève a tracée est une droite et les côtés qui sont des hauteurs n'ont pas été prolongées. Après le tracé de ces cinq cas de figures les deux élèves ont conclu : « oui les hauteurs d'un triangle quelconque ont toujours un point commun *sauf* pour le triangle rectangle ». Notons que le binôme s'est trompé, il n'a pas reconnu deux hauteurs du triangle rectangle. N'empêche, nous remarquons que pour ce binôme un contre exemple ne suffit pas pour réfuter un énoncé mathématique.

Le binôme Y a réagi différemment. Après avoir vérifié que la mention accompagnant la situation 1 était vraie, il a conclu que les hauteurs d'un triangle quelconque n'ont pas toujours un point commun. Cependant à la suite de l'introduction de la situation 3 (précisons qu'à ce moment là pour le binôme une hauteur est une droite) nous observons un revirement chez ce binôme. Et, au binôme de déclarer : « les hauteurs d'un triangle quelconque ont toujours un point commun *sauf* pour le triangle plat ». Ainsi, chez un même binôme nous observons deux comportements contradictoires ; les élèves mobilisent à la fois la conception

« un contre exemple suffit pour réfuter un énoncé mathématique » et « un contre exemple ne suffit pas pour réfuter un énoncé mathématique ».

A la suite de l'introduction de la situation 3 le binôme Z a conclu « Donc les hauteurs *peuvent* ne pas avoir un point d'intersection selon la nature du triangle ».

Ces différences dans la réaction, des élèves questionnés en arabe et ceux questionnés en français, devant la réfutation d'un énoncé mathématique nous laisse supposer que les élèves ne traduisent pas leurs connaissances.

Par ailleurs, en analysant les programmes officiels et les manuels scolaires des mathématiques nous avons constaté que le « contre exemple » n'est ni un objectif ni un objet de l'enseignement des mathématiques aussi bien en langue arabe (dans l'école de base) qu'en langue française (en 1<sup>ère</sup> année secondaire). Néanmoins, les élèves y sont initiés dans les deux langues à travers quelques contre exemples. D'ailleurs, dans différentes occasions l'enseignant peut expliquer aux élèves qu'un contre exemple suffit pour réfuter un énoncé mathématique. Parallèlement, dans l'enseignement de la matière français, ces élèves ont été exercés à prendre position pour et contre une même thèse. C'est un objet d'enseignement implicite en langue française alors qu'il ne l'est pas en langue arabe.

Ces faits sont autant d'indices qui nous laissent penser que l'enseignement de l'argumentation dans la matière « français » puisse laisser des traces dans l'activité mathématique, des élèves, véhiculée par la langue française.

Ainsi, nous avons retrouvé des traces de l'argumentation rhétorique croissante le seul type d'argumentation enseignée dans la matière « français » et ce dans l'activité mathématique véhiculée par la langue française. De même nous avons trouvé des traces de l'argumentation rhétorique croissante et l'argumentation rhétorique décroissante seuls types d'argumentation enseignées dans la matière « arabe » et ce dans l'activité mathématique véhiculée par la langue arabe. De nouveau un indice qui nous conforte dans l'idée que les élèves ne traduisent pas leurs connaissances.

## VII CONCLUSION

Les résultats de notre étude nous ont permis de constater que le type d'argumentation produite dépend aussi bien de la langue utilisée que des connaissances acquises dans cette langue. Les connaissances acquises dans les langues et liées au thème « Argumentation » ont aussi montré leur influence dans le cas de l'argumentation qui permet de réfuter un énoncé en mathématiques.

Les élèves utilisent, dans les deux langues, des argumentations s'appuyant sur un empirisme naïf. Rappelons, que les élèves ont été entraînés à la généralisation à partir de quelques cas à l'école de base au point que cela puisse constituer un obstacle à l'apprentissage du raisonnement déductif (même en 1<sup>ère</sup> année secondaire).

Ce travail exploratoire nous conduit à émettre principalement deux conjectures : influence de l'enseignement de l'argumentation en classe de « Français » sur la pratique des élèves en classe de « Mathématiques » et que la pratique explicite de la réfutation d'un énoncé dans l'enseignement de la matière « Français » représente un obstacle à la réfutation d'un énoncé mathématique.

Précisons qu'au cours de ce travail, nous n'avons véritablement retenu que les caractéristiques renvoyant à l'expression écrite, bien que reconnaissant que les élèves s'appuient sur l'arabe dialectal. Il serait intéressant de revenir sur ces aspects en précisant le statut, sur l'argumentation, de l'Arabe dialectal, de l'Arabe écrit et du français écrit.



## BIBLIOGRAPHIE

- Balacheff N. (1999) Apprendre la preuve. In: Sallantin J., Szczeciniarz J. J. (eds.) Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle (pp.197-236). Paris: PUF.
- BARBIN E. (1996), Quelles conceptions épistémologiques de la démonstration pour quels apprentissages ?, *REPERES-IREM*, N°12, pp93- 113.
- BENVENISTE E. (1995), *Problèmes de linguistique générale I*, Tunis, Cerés Editions.
- BENVENISTE E. (1995), *Problèmes de linguistique générale II*, Tunis, Cerés Editions.
- DUCROT O., SCHAEFFER J-M. (1995), *Nouveau dictionnaire encyclopédique des sciences du langage*, France, SEUIL.
- DUVAL R. & EGRET M-A. (1993), Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif, *REPERES*, N° 12, pp 114-140.
- DUVAL R. (1988), Ecart sémantiques et cohérence mathématique : Introduction aux problèmes de congruence, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, IREM de Strasbourg, Vol 2, pp 7-25.
- DUVAL R. (1990), Pour une approche cognitive de l'argumentation, *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, IREM de Strasbourg, Vol 3, pp 195- 221.
- DUVAL R. (1992), Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit X*, N°31, pp37- 61.
- DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang.
- DUVAL R.& EGRET M-A. (1989), L'organisation déductive du discours, *Annales de didactique et de Sciences cognitives*, IREM de Strasbourg, Vol 2, pp 25- 40.
- HAI ALI N. (2001), Ecart entre discours naturel et discours mathématique dans le cas de l'arabe tunisien ; les argumentations engendrées en début d'apprentissage de la démonstration dans une activité mathématique, DEA, Université de Tunis.
- LAKATOS I. (1976), *Preuves et réfutations, essais sur la logique de la découverte scientifique*, Hermann,(1984).
- PLANTIN C. (1990), *Essais sur l'argumentation*, Paris, Editions Kimé.