ISSN 1292-8763

Preuve

International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof

La lettre de la Preuve
Novembre/Décembre 2000

Texte en ligne

Le Travail du Maître dans la Gestion d'une Situation de Preuve

par

Patricio Herbst
The University of Michigan

Date originale de publication : 1999

Ecole d'été de didactique des mathématiques

Plestin les Grèves

La lettre de la Preuve : http://www-didactique.imag.fr

Le Travail du Maître dans la Gestion d'une Situation de Preuve[1]

Patricio Herbst
The University of Michigan

Depuis l'émergence de l'intérêt pour la cognition, les recherches sur l'enseignement des mathématiques aux Etats-Unis se sont efforcées de décrire les rapports personnels des élèves et des maîtres en relation avec des notions mathématiques : des études récentes sur la preuve (Harel & Sowder, 1998 ; Knuth, 1999) relèvent d'une telle approche canonique. Dans ces approches, le travail du maître dans la gestion des situations de preuve — par exemple en aménageant ce qui peut être donné à prouver par les étudiants ou ce qu'il peut accepter comme preuve de leur part — n'est pas conceptualisé. Dans le cours des années 90, un intérêt renouvelé s'est manifesté pour l'étude de l'apprentissage dans le contexte de la classe. En particulier, Cobb et ses collègues (Cobb & Bauersfeld, 1995), dans le cas de classes expérimentales, ont cherché à décrire les actions du maître pour mettre en place des moyens de régulation des connaissances.

Ces chercheurs ont proposé l'expression de "norme sociomathématique" pour désigner des moyens de régulation développés à l'initiative du maître, mais en interaction avec la classe, pour contrôler les productions mathématiques. Voigt (1995) identifie les normes sociomathématiques comme des formes subtiles avec lesquelles le maître peut assurer son rôle de "représentant de la communauté des mathématiciens". La notion de "norme sociomathématique" semble prometteuse parce qu'elle permet de penser l'émergence d'une coutume de la preuve qui, bien que manquant d'emblée d'assez de règles explicites, disposerait cependant de dispositifs lui permettant de se rapprocher progressivement des standards d'une communauté mathématique[2]. Cependant, même si cette notion est utile pour décrire l'efficacité du maître pour établir, sans recours explicite à l'autorité, des structures de contrôle des connaissances, son usage paraît apologétique : le travail du maître pour établir des normes est vu seulement comme un raffinement logistique nécessaire, mais la question du statut épistémique de ses différentes interventions n'est posée à aucun moment. Cette remarque devient plus évidente quand on cherche à décrire les processus de régulation des connaissances dans des classes ordinaires.

Une proposition alternative : Normes sociomathématiques et normes sociodidactiques

Mon travail de thèse (Herbst, 1998) s'est développé autour de la question : Quelles sont les régulations qui déterminent ce qui fonctionne comme preuve dans les classes de mathématiques ordinaires ? L'hypothèse que ces régulations se développent dans l'interaction du maître avec des élèves est essentielle mais pas suffisante — il faut considérer aussi les enjeux de l'interaction. J'ai fait l'hypothèse que le travail du maître engage plus qu'une seule rationalité et donc, que le rôle du maître ne peut pas être conceptualisé seulement comme celui d'un représentant de la communauté des mathématiciens. Un but important de mon travail a été de chercher une manière de décrire les différentes rationalités qui sont à la base

[1] Ce texte, dans laquel je introduit quelques aspects de mon travail de recherche, est une resume de la deuxième partie de la presentation "Prouver et enseigner la démonstration dans la classe des mathématiques aux Etats-Units" (donée a l'ecole d'ete). Le but de la premiere partie de la presentation etait de faire un survol critique de quelques exemples canoniques de recherches sur la preuve aux Etats-Units en regardent la place que ces recherches accordent au role du maître.
[2] Sur la notion de *coutume*, voir Balacheff, N. (1988).

des actions du maître dans la gestion d'une situation qui permet la production d'une preuve acceptable. En particulier, je cherche ici à illustrer comment ces rationalités différentes opèrent pour décider ce que l'on peut donner à prouver aux élèves.

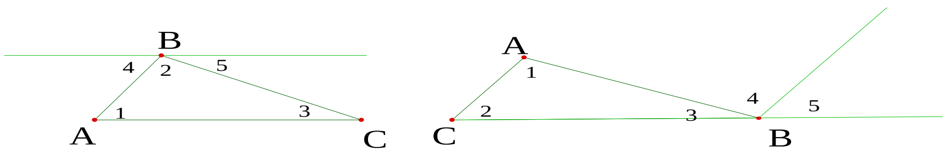
Par rapport à la production d'une preuve, le maître est soumis à deux types de contraintes : d'une part les arguments fournis doivent être acceptables du point de vue du savoir à enseigner, d'autre part les arguments à fournir doivent être accessibles du point de vue de la rationalité disponible chez l'élève. En reprenant l'idée de "structuration du milieu" (Margolinas, 1995) j'ai proposé d'identifier les normes sociomathématiques aux éléments d'une rationalité mathématique qui règlent les actions possibles du sujet dans la situation adidactique, et j'ai proposé l'expression ***normes sociodidactiques*** pour désigner les éléments d'une rationalité didactique qui règlent les actions possibles du maître (ou de l'élève en tant que sujet universel) dans la situation où le maître prépare sa classe (métadidactique).

Dans le modèle théorique des situations adidactiques de preuve, le milieu de l'élève est un milieu social. La preuve, nous dit Balacheff (1987), est une explication de la validité d'un énoncé qui s'offre à une communauté et qui s'assujettit à un système de validation accepté par cette communauté. Dans la classe que l'on observe, le maître peut aussi jouer le rôle de milieu pour l'élève, mais pas toujours et pas en disant "n'importe quoi". Je propose de réserver la notion des "norme sociomathématique" pour parler de ces normes qui règlent les actions et les réactions qui sont possibles dans l'interaction entre le sujet qui prouve et le milieu antagoniste. D'une part, ces normes sont le résultat du projet du maître, d'autre part elles obligent le maître à un certain assujettissement. Ainsi, les réactions "naturelles" du milieu peuvent servir à l'élève comme critère pour produire une preuve ou décider de la validité de ses actions. Et l'usage assujetti des lois de cette "nature" sert à l'enseignant comme un moyen pour amener l'élève à produire la preuve en question avec le sens de preuve envisagé par le maître. Les normes sociomathématiques définissent donc un domaine de légitimité à l'intérieur duquel ce que le maître dit ou fait est vu comme ce que "quelqu'un pourrait avoir dit ou fait". En particulier, à l'intérieur des limites de ce domaine il peut se développer un processus de négociation sur les mathématiques où les partenaires (enseignant et élèves) disent ou font des choses qui ont un statut comparable.

Les normes sociodidactiques, d'autre part, seront des normes que règlent les connaissances qui émergent de l'interaction entre le maître qui prépare sa classe et son milieu — la situation didactique. Le rôle du maître répond au besoin de mettre en place une intervention qui permette à la classe la prise en charge de la production d'une preuve. Dans la mesure où les décisions prises dans cette situation métadidactique fournissent une réponse aux contraintes sur le travail du maître, l'intervention projetée sert au maître comme un moyen (économiquement) plus ou moins optimal pour produire une preuve au sein de la classe. Ainsi, par exemple, le choix que le maître (ou plus généralement le sous-système enseignant) fait parmi des énoncés alternatifs à un énoncé à prouver peut se voir comme le résultat d'un processus d'optimisation où l'alternative choisie est celle qui satisfait au mieux les contraintes qui pèsent sur lui et qui permet d'établir une situation viable pour les élèves. Dans la suite, j'utilise les notions de normes "sociomathématiques" et "sociodidactiques" pour reconstruire, dans l'analyse d'un épisode, la décision sur la manière de poser un problème de preuve.

L'épisode sur la somme des angles d'un triangle

L'épisode que je présente se développe autour de la preuve du théorème sur la somme des angles d'un triangle dans une classe de 9ième année de l'enseignement obligatoire — les observations que je fais ici s'appuient sur manuel et sur le film vidéo d'une leçon. En vue de préparer le terrain pour le théorème, le manuel invoque des expériences passées à l'occasion desquelles les étudiants ont plié des triangles en papier pour rassembler les trois sommets en un point commun. Le théorème de la somme des angles d'un triangle est énoncé et le manuel annonce : "le postulat de l'unique droite parallèle va t'aider à prouver ça utilisant un raisonnement déductif" (Rubinstein et al, 1995, p. 439). Le manuel offre ensuite une preuve, comme "réponse possible", en utilisant un triangle *ABC* (voir Figure 1) et demande ensuite aux élèves "[d']utiliser la [Figure 2] pour donner une preuve du théorème sur la somme des angles d'un triangle" (la leçon filmée correspond à la résolution de cet exercice).



Figures 1 et 2 : Données pour chaque preuve du théorème.

Ce que le manuel nous présente est le produit d'une décision qui se rapporte au choix d'une part de ce que l'on peut donner à prouver et d'autre part de ce que l'on peut recevoir comme preuve, dans cette classe. Une première question qu'il faut poser est la suivante :

> Pourquoi, si l'énoncé du théorème prend du sens dans l'activité de pliage d'un triangle de papier, la preuve finalement proposée par le manuel n'utilise en rien cette idée ?

La réussite dans l'activité de pliage d'un triangle de papier n'est pas un exemple générique prêt-à-l'emploi. On peut conjecturer que la décision d'utiliser le contexte du pliage s'accompagne de la responsabilité de mettre en place une forme de questionnement sur le caractère effectif des actions de pliage, pour conduire à l'idée que les raisons qui font que la solution est toujours possible viennent du fond (i.e. sont de caractère intellectuel). Les conditions pour que l'élève puisse accepter la responsabilité de faire, ou de lire, une preuve intellectuelle en partant de l'activité de pliage demandent que le maître organise un milieu qui impose un travail explicite de mathématisation de certaines actions. Il faudrait négocier des normes sociomathématiques qui permettent de s'appuyer sur l'efficacité des actions matérielles, en même tant qu'elles permettent de développer de moyens intellectuels pour les contester.

Pourtant, l'idée de prouver le théorème en utilisant une droite auxiliaire et des propriétés des angles déterminés par une sécante sur un couple de droites parallèles, utilise un triangle qui peut être accepté (c'est-à-dire, que le maître peut tolérer) comme générique. L'idée au cœur de cette preuve met en jeu la reconnaissance d'angles congruents — ce qui est d'ordinaire la partie de l'élève dans une tâche requérant des propriétés d'angles déterminés par une sécante sur des droites parallèles. Donc, le choix de cette idée de preuve répond au mieux à la nécessité du maître de fournir une opportunité à l'élève d'accéder (en continuité avec ses connaissances antérieures) à une preuve valide. Mais, ce choix est-il adapté aux conditions permettant de constituer un milieu dans l'interaction avec lequel l'élève puisse réussir à s'approprier de tels arguments ? La décision de demander une deuxième preuve tient à ce que l'on veut obtenir la dévolution à l'élève du problème de la généralité de l'argument. Elle semble aussi être mieux adaptée aux conditions favorisant la production d'une réponse par l'élève — parce que la première preuve montre une voie d'attaque possible. Mais, pour cette raison même, le problème en question présente des difficultés : le maître doit choisir dans un ensemble d'énoncés possibles (e.g. "prouvez le théorème sur la somme des angles d'un triangle", "montrez que l'on peut prouver le théorème … si l'on trace la droite auxiliaire par…") celui qui montrera que l'élève a compris l'idée de la preuve et qui permettre que s'engage le travail autonome de l'élève. Cette tension est sous-jacente à la décision d'énoncer l'exercice tel il est énoncé.

La validité de telles décisions est un problème pour le maître qui prépare sa classe. Les normes sociodidactiques donnent des critères pour résoudre ce type de problèmes ; et avec elles, les normes sociodidactiques constituent un des fondements rationnels du travail du maître dans la situation didactique. C'est cette rationalité qui est responsable du maintien du projet didactique et, en particulier, reprenant la formulation de Voigt, c'est elle qui interpelle le maître comme seul représentant de la communauté des mathématiciens dans la classe.

Comme je l'ai proposé plus haut, les normes sociomathématiques opèrent dans un autre domaine de légitimité dans lequel quelques actions du maître (en particulier) peuvent être attribuées au milieu antagoniste du sujet apprenant. Dans l'exemple que nous avons choisi, la stratégie qui consiste à montrer que l'idée de la preuve est indépendante du sommet doit apparaître en opposition à celle de "reproduire la preuve précédemment étudiée dans une nouvelle figure" ou à celle de "mesurer les angles pour vérifier le théorème." Les normes sociomathématiques règlent ce que l'élève peut légalement faire avec la figure dans les différentes phases de production de la preuve envisagée. En particulier, après la décision de tracer la droite auxiliaire, les propriétés des angles déterminés par une sécante sur plusieurs parallèles permettent une relation d'*inspection* (par opposition à une relation d'*action*) entre l'élève et la figure, et contrôlent la validité des décisions de l'élève. A l'intérieur de ce domaine, les actions du maître (demandant une justification pour une affirmation portant sur une congruence) sont du même ordre que les actions des élèves et peuvent "naturellement" faire avancer la production de la preuve.

Mais la décision de tracer une droite, comme d'autres pratiques possibles qui comportent une action sur la figure, est étrangère à cette relation d'inspection entre élève et figure. Le dessin d'une droite différente de la droite tracée dans la première preuve peut apparaître plutôt contingent : si peu d'élèves, voire aucun, la trouvent, cela pourrait renforcer la croyance que la tâche n'était finalement qu'une devinette. Le choix de l'énoncé de l'exercice peut laisser cette décision comme un objet de négociation sociomathématique (au risque que l'enseignante doive à un moment donné dire "il faut tracer une droite parallèle par un autre sommet") ou la donner avec la figure, comme on l'observe justement dans la classe filmée. Cette version de l'énoncé d'une certaine façon libère l'enseignante de la nécessité de contrôler le statut de ses actions. En fait, après que la classe a produit une preuve acceptable, Andy identifie son comportement mathématique avec celui des élèves et se détache des décisions du manuel :

> Alors, il y avait un coup de génie là, et ce coup de génie était de mettre cette ligne BD là. Okay ? Ça n'est pas quelque chose d'évident à faire. Okay ? Je crois que c'est la raison par laquelle ils nous ont donné la figure.

Ainsi, l'énoncé du problème de preuve donné aux élèves est aussi sous la contrainte de la rationalité mathématique disponible chez les élèves. La décision d'aménager la figure en traçant une demi-droite parallèle à l'un des cotés du triangle cherche à définir un rôle au maître dans lequel il peut aider à produire la preuve envisagée en continuité avec la rationalité des élèves.

Conclusion

Les normes sociomathématiques et sociodidactiques définies de cette manière sont des outils qui permettent d'expliquer quelques actions du maître dans la gestion de la production d'une preuve acceptable. L'analyse de ce "que l'on peut donner à prouver" montre en particulier que l'énoncé de la tâche et le degré de codification de la figure donnée aux élèves résultent d'un travail du maître pour chercher une solution de compromis. Dans ce processus le maître cherche une situation dans laquelle les élèves ont l'opportunité de produire une preuve mathématiquement acceptable, et dans laquelle le maître peut avoir la chance de jouer un rôle comparable a celui de l'élève du point de vue de la rationalité que l'élève peut mettre en place.

Référence :

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18,* 147-176.

Balacheff, N. (1988a). Le contrat et la coutume : Deux registres des interactions didactiques. In C. Laborde (Ed.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* (pp. 15-26). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Cobb, P., & Bauersfeld, H. (Eds.). (1995a). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *CBMS Issues in Mathematics Education Volume 7*. Washington, DC: American Mathematical Society.

Herbst, P. (1998). *What works as proof in the mathematics classroom*. Unpublished doctoral dissertation. The University of Georgia, Athens.

Knuth, E. (1999). *The nature of secondary school mathematics teachers' conceptions of proof*. Unpublished doctoral dissertation. University of Colorado, Boulder.

Margolinas, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. In C. Margolinas (Ed.), *Les debats en didactique des mathématiques* (pp. 89-102). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Rubinstein, R., Craine, T., & Butts, T. (1995a). *Integrated mathematics 2*. Evanston, IL: McDougal Littell.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 163-201). Hillsdale, NJ: Erlbaum.