ISSN 1292-8763

Preuve

International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof

**La lettre de la Preuve**
**Novembre/Décembre 2000**

Texte en ligne

# Prouver et enseigner la démonstration dans la classe de mathématiques aux Etats-Unis

par
Patricio Herbst
The University of Michigan, U.S.A.

Date originale de la communication : 1999
Ecole d'été de didactique des mathématiques
Plestin les Grèves

**Editeur : Maria-Alessandra Mariotti**
English Editor : Virginia Warfield, Editor en Castellano : Patricio Herbst
Advisory Board : Nicolas Balacheff, Paolo Boero, Daniel Chazan, Raymond Duval, Gila Hanna, Guershon Harel, Celia Hoyles, Erika Melis, Michael Otte, Yasuhiro Sekiguchi, Michael de Villiers

**La lettre de la Preuve : http://www-didactique.imag.fr**

# Prouver et enseigner la démonstration dans la classe de mathématiques aux Etats-Unis

Patricio Herbst[1]
The University of Michigan, U.S.A.

## INTRODUCTION

Le National Council of Teachers of Mathematics a récemment publié le document *Principles and Standards for School Mathematics*—un document de discussion qui anticipe les futurs Standards 2000. Un changement notable par rapport aux standards précédents de 1989 est que **la preuve reçoit une place notable** au sein d'un Standard qui s'appelle "Reasoning and Proof."

D'ordinaire, parler de démonstration aux Etats Units **évoque l'usage en géométrie du format de preuve sur deux colonnes**—figure 1 nous en donne un exemple. Dans la colonne de gauche, on écrit une suite déductive de *statements,* énoncés simples qui progressent vers l'énoncé de la conclusion à prouver. Pour chaque pas de la déduction on doit identifier sur la colonne de droite une *reason* explicite: Ce sera l'hypothèse, le postulat, l'axiome, le théorème, ou la définition qui justifie l'énoncé en question.

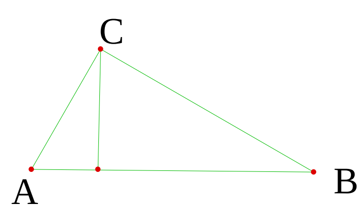
---

**Theorem 7.4** Pythagorean Theorem
In a right triangle, the square of the length of the hypotenuse equals the sum of the squares of the lengths of the legs.

---

**Given**: $\Delta\, ABC$ is a right triangle.
$C$ is a right angle.

**Prove**: $a^2 + b^2 = c^2$




**Proof**:

| Statements | Reasons |
|---|---|
| **1**. $\Delta\, ABC$ is a right triangle. $C$ is a right angle. | **1**. Given |
| **2**. Draw a perpendicular from C to $\overline{AB}$. | **2**. Theorem 2.9 |

[1] Mes remerciements à Jeremy Kilpatrick et Eric Knuth par des reponses a quelques questions ponctuelles, à Humberto Alagia et Nicolas Balacheff par des reactions à des brouillons anterieures, et à Martine and Nicolas Balacheff par l'aide dans le travail de rediger le texte en Français.

| | |
|---|---|
| **3**. $\frac{c}{a}=\frac{a}{x}, \frac{c}{b}=\frac{b}{y}$ | **3**. Theorem 7.3 |
| **4**. $a^2 = cx, b^2 = cy$ | **4**. Product of mean equal product of extremes. |
| **5**. $a^2 + b^2 = cx + cy$ | **5**. Addition Property |
| **6**. $a^2 + b^2 = c(x + y)$ | **6**. Distributive Property |
| **7**. $a^2 + b^2 = c^2$ | **7**. Segment Addition Postulate, Substitution |

*Figure 1.* A two-column proof (from Clemens et al., 1994, p. 301).

En opposition à cette association ordinaire entre preuve et écriture d'une démonstration dans le format sur deux colonnes, les nouveaux Standards préconisent **l'inclusion de la preuve partout en mathématiques et dans toutes les classes de la scolarité**. Dans la rethorique des standards, l'idée de prouver est plus associée à 'donner un argument convainçant' que à 'justifier tous les pas d'un raisonnement déductif.'

Des objections interessants ont été posés par quelques jeunes mathématiciens qui ont été réunis avec Jeremy Kilpatrick pour discuter ce Standard de "Reasoning and Proof." Ils ont présentés des doutes à l'idée qu'il était demandé à des jeunes enfants fournir une preuve. Les objections se rapportent aux possibilités que le maître peut avoir dans ces cas pour établir la conclusion d'un argument en considérant des raisons mathematiquement valables aussi même que disponibles chez les enfants.[2]

Ces objections présentés communiquent une perception valable des conditions réels du travail du maître—une perception sur la rationalité du status quo que les Standards, interessés à persuader les maîtres, évitent systématiquement de considérer. En fait, un appel à la même rationalité permet d'expliquer la continuité historique du format de preuve sur deux colonnes par rapport à son caractère-outil pour le maître—lui permettant de gérer le travail de preuve à l'interieur de ceux conditions réelles de travail.[3]

Dans mon travail de thèse, j'ai essayé de fournir des éléments qui permettent d'analyser, du point de vue de l'observateur externe qui s'intéresse à une classe ordinaire, le travail mathématique du maître pour gérer la production des preuves. Mon intérêt pour la preuve en mathématiques est de comprendre comment est-ce que le maître gere la tension entre d'une part ce **qui est une preuve mathématiquement acceptable** et d'autre part **les strategies selon lesquelles les connaissances s'établissent publiquement dans le regime de la classe**. Une conséquence possible d'un tel projet de recherche sera de pouvoir expliquer, et même anticiper, quel type de remaniements peuvent suivre à l'imposition d'integration vertical et horizontal de la preuve dans le système d'enseignement. Dans cet exposé je fais un compte rendu de quelques aspects de ma thése, mais le projet principal c'est de rendre compte des conditions 'ecologiques' de

[2] Jeremy Kilpatrick, personal communication.
[3] Voir Herbst, P. (1999a). On proof, the logic of practice of geometry teaching and the two-column proof format. International Newsletter on Proof (http://www.cabri.net/Preuve/Resumes/Herbst/Herbst99.html); et Herbst, P. (1999b). The role of the teacher: What do the practices associated with two-column proofs say about the possibilities for argumentation? International Newsletter on Proof (…/Herbst99a.html).

mon travail dans les travaux de recherche sur la preuve aux Etats-Units—l’exposé est proprement une analyse de l’etat de la recherche.

Cet exposé se divise en trois parties. Dans une première partie, je présenterai brièvement deux études anciennes sur la preuve qui ont une valeur fondamentel pour comprendre les recherches sur ce sujet aux Etats-Unis. Dans une deuxième partie, je présenterai deux autres recherches plus contemporaines sur la preuve: ce sont des études sur les conceptions des élèves et des enseignants à propos de la preuve. Dans mon compte rendu, je m’intéresse au fait de decouvrir des éléments de conceptualisation du rôle du maître dans la gestion d’un contrat (didactique) local que permet la preuve—et si ces éléments ne son pas lá, de donner une explication. Dans une troisième partie, je rends compte de quelques avances sur la conceptualisation du rôle du maître qui ont des origines dans le cadre du constructivisme social, notamment l’emergence de la notion de normes sociomathématiques. A ce sujet je rattacherai mon travail de thèse dans le cadre duquel j’ai proposé de conceptualiser le travail de l’enseignant comme la juxtaposition de deux jeux — un jeux mathématique et un jeux didactique — qui sont régulés par des systèmes de normes différentes qui sont à la base de la négociation d’un probable contrat didactique qui permet l’existence de situations de preuve.

**PREMIERE PARTIE**

## Deux études anciennes sur la preuve

Les objectifs instrumentalistes du système educatif americain sont pertinents pour comprendre pourquoi la présence de la géométrie et de la démonstration dans le curriculum a été fréquemment débattu. Dans le premier quart du siècle, les résultats des études de Edward Lee Thorndike ont été utilisés pour affirmer qu’il n y avait pas de soutien empirique pour la croyance que la géométrie démonstrative pouvait entraîner les facultés de raisonnement logique. Alors, comme les conaissances géométriques fondamentales pour la vie et le travail s’apprenaient dans la géométrie intuitive de l’école élémentaire, il s’agissait de faire le course de géométrie demonstrative facultatif.

Cette menace a motivé la création du National Council of Teachers of Mathematics qui a rassemblé des réflexions et recherches pour s’opposer. Les travaux ramassés par le NCTM essaient de maintenir la géométrie démonstrative comme part du curriculum en affirmant que si l’apprentissage du raisonnement n’était pas apparu dans les tests psychologiques, c’était **parce que les maîtres l’ont supposé une occurrence naturelle**. Donc, le NCTM a encouragé les maîtres à enseigner “la nature de la preuve” comme une méthode de raisonnement general, et à utiliser aussi des exercices nonmathématiques de preuve pour assurer le transfert vers situations de la vie ordinaire.

### *L’étude de Harold Fawcett sur The Nature of Proof*

Une étude remarquable de ce temps est la thèse de Harold Fawcett (1938), “The Nature of Proof,” laquelle reportait sur un cours experimental de géométrie où le entraînement pour le transfert du raisonnement logique vers des contextes non geometriques a été integré à des activités de la classe. Si l’on regarde en detail ce cours, on s’aperçoit qu’il y avait une grande insistance à rendre explicites toutes les hypothèses utilisées pour soutenir une conclusion mais très peu d'insistance pour formuler et prouver propositions qu'on appellerai "fortes"—ceux qui cherchent afaiblir les hypothéses en maintenant la conclusión, etc. En fait, les pratiques argumentatives du cours de Fawcett étaient mieux adaptés au raisonnement évaluatif duquel un lecteur a besoin pour decouvrir le soustexte d'un texte qu'au raisonnement constructif qui caracterise le travail du mathématicien. Cette méthode de la "nature of proof" a été utilisée après pour imposer une perspective déductive à l'interprétation et à l'évaluation des réglements de commerce ou les informations de la presse. Fawcett ne pose pas de question sur la possible transposition des savoirs operée par cette méthode de la "nature of proof" ou sur les suppositions sous-jacentes à cettes pratiques d'interprétation et évaluation. Le but de la recherche était de montrer qu'on pouvait preparer un cours de géométrie de telle maniere qu'il pouvait maintenir un niveau de performance des élèves comparable à celui du cours traditionnel, et même montrer que le transfert des compétences de raisonnement était possible. Les résultats de Fawcett étaient favorables dans les deux cas, tandis que l'évidence pour le second était anecdotal.

*L'étude de Sam Ireland sur The Nature of Proof*

Au début des années soixante-dix, près de la fin du mouvement des mathématiques modernes, Sam Ireland a preparé aussi un cours de géométrie pour enseigner la nature de la preuve. Ireland identifie comme des objetifs de cette méthode l'apprentissage de la logique propositionnelle et de la méthode axiomatique, et appelle la géométrie un prétexte pour produire cet apprentissage. Les unités didactiques proposés par Ireland étaient des unités courtes intégrées par systèmes deductifs indépendants (sur logique, sur parallélisme, et sur congruence). L'accent du cours était mis sur l'écriture des preuves, débutant avec l'écriture de la preuve complète comme syllogisme et aprés réduisant ça à la forme 'plus courte' du format sur deux colonnes. Le critère pour l'evaluation du cours et pour recommander sa viabilité était la performance des élèves dans plusieurs tests: Ireland a decouvert que même aprés le cours, les élèves etaient beacoup moins compétents à l'application de la règle du **modus tollens** qu'à l'application du **modus ponens**, et alors il a recommandé d'éliminer la prèmiere de ces règles dans les versions futures du cours. Les réponses aux tests ont montré aussi des différences notables en compétences logiques selon que le contexte était la géométrie ou autre chose. Cette découverte a motivé Ireland pour dire que si la performance de la production des preuves géométriques ne s'accompagne pas de la compréhensión de la structure logique sous-jacente, il est naïf de penser que les compétences de preuve vont se transférer à situations non géométriques.

*Commentaire sur les etudes de Fawcett et Ireland*

Les études de Fawcett et Ireland appartienent à une classe de travaux appelés en général ***treatment evaluation***—un genre caracteristique de les recherches Americaines dans les années soixante et soixante-dix. Ces deux études se dévéloppent autour du projet et enseignement d'un cours mais on ne peut pas dire qu'ils sont orientés par une problématique didactique du rôle du maître. En fait, ces deux études gardent les discussions du projet d'enseignement dans une boîte noire et seulement analysent l'enseignement à travers les résultats des élèves dans les tests.[4]

Mais il est important de noter les circonstances dans lesquelles ces études sont apparues. Les travaux de Fawcett voudraient fournir une réponse à une question de politique éducative: les résultats de sa recherche doivent être interprétables et significatifs pour une audience intéressée à prendre des décisions en se référant au critère fondamental de que les expériences scolaires doivent être une preparacion efficace pour le travail de l'américain moyen. Les *mathematics educators* ont pris le rôle qui leur était assigné par le projet des generalistes de l'education—le remplissement des detailles d'un curriculum suivant des idées generales et son implémentacion expérimental contrôlé par la machinerie psychometrique.

La réforme des mathématiques modernes a engagé maîtres et mathematiciens dans la conception d'un curriculum où le protagoniste majeur était le savoir savant. Comme consequence du moindre contrôle des généralistes sur les questions ideologiques de cette conception, les exigences d'évaluation étaient également majeures. Le travail de Ireland a la marque de cette époque: La conception du curriculum est devenu une tâche technique de recherche et développement, mais les critères pour l'optimisation du produit sont encore obtenus par la mesures de la réussite des élèves.

**SECONDE PARTIE**

## La Logique Privée de l'Élève et la Logique Privée du Maître: Deux études Américaines récentes et ses apports à la conceptualisation du travail du maître

L'émergence de la science cognitive aux Etats-Units a servi pour noter que l'association entre apprentissage et réussite aux tests pose des problémes. Ils ont suivi des études qui s'intéressaient au développement de quelques conceptions mathématiques chez les élèves. À difference des études d'evaluation qu'aient agregés les réponses des éleves pour prendre des décisions sur le curriculum, les recherches originés de cet interêt à la cognition se sont ocupés d'analyser ces réponses individuellement pour comprendre les mathématiques personnelles des acteurs du système didactique. Je propose de contraster ici deux études sur des **schèmes de preuve** respectivement des étudiants et des maîtres. Deux questions fournissent l'axe de comparaison: Quelle conception du travail du maître on peut decouvrir dans chaque étude? Et, aux objectifs de qui sert les résultats de (ou les méthodes exemplifiés par) chaque étude?

### *Guershon Harel et Larry Sowder: Exploration des schèmes de preuve d'étudiants universitaires*[5]

Harel et Sowder prennent en compte des diagnostiques des autres chercheurs sur les difficultés des étudiants avec la démonstration et indiquent que ces résultats

[4] Remarquons aussi que ce genre de travaux sont ceux regardés comme des travaux 'experimentaux' par la commaunauté educative. Mais, il s'agit plutot de travaux de 'control de qualité.'

[5] Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. CBMS Issues in Mathematics Education Volume 7. Washington, DC: American Mathematical Society.

témoignent des échecs des méthodes d'enseignement traditionnel. Ces méthodes, disent-ils, n'incluent pas l'élève dans la construction des savoirs, ne promouvent pas la compréhension du rôle de la démonstration en mathématiques, limitent la démonstration à l'étude de la géométrie, et demandent une rigueur excesive très tôt. Les auteurs disent aussi:

> Une raison fondamentale par la quelle les étudiants ont des difficultés sérieuses pour comprendre, apprécier, et produire des démonstrations est que nous, leurs professeurs, considèront comme naturel ce qui est une evidence suffissante pour eux. Au lieu d'affiner petit à petit leurs conceptions sur ce qui constitue une évidence et une justification en mathématiques, nous imposons des méthodes de preuve et des règles d'implication qui fréquemment sont clairement différentes de ce qui pourrait les convaincre. (Harel & Sowder, 1998, p. 237)

Les recherches de Harel et Sowder se développent dans le contexte d'expériences d'enseignement dans lesquelles l'intention était de partir des conceptions perceptuelles, symboliques, ou rituelles des élèves sur la preuve et d'arriver à une conception de base sur l'intuition, la conviction interne, et le sens de nécesité. Les expériences d'enseignement se sont developpés dans des cours reguliers de théorie des nombres, de géométrie, et d'algebre linéaire élémentaire et avancée du premier cycle d'université—Guershon Harel était l'enseignant de tous ces cours.

La stratégie didactique fréquemment suivi était de présenter un probléme choisi parce que son développement pouvait demander une preuve (*proof-eliciting problem*). Les élèves travaillent individuellment ou en groupes sur le problème et après on leur demande de justifier leurs conjetures en utilisant leur propres mots. A cette phase de conviction personelle suit une deuxième phase pour convaincre les autres où la justification anterieure est examinée par la classe.

Le projet de Harel et Sowder cherche à décrir les schèmes cognitifs de preuve des étudiants, documenter le progrés des étudiants par rapport à ses conceptions de la preuve pendant ses études universitaires de mathématiques, et sugerer des principes pedagogiques pour faciliter la compréhension, l'estimation, et la production des preuves. Les données recueillies sont des chroniques de classes relevées par des assistantes de recherche, des enregistrements audio des entretiens avec les étudiants, les travaux écrits des étudiants, et des anecdotes de classe recréés par l'enseignant.

Pour définir un schème de preuve, Harel et Sowder définissent premièrement la **preuve comme le processus utilisé par un individu pour provoquer ou enlever les doutes sur la verité d'une observation**.[6] Ils considèrent que **le processus de preuve inclus** des subprocessus de (a) ***conviction personelle*** et de (b) ***persuasion pour convaincre les autres***. En suite, ils définissent le ***schème de preuve*** d'une personne comme ***ce qui lui permet de se convaincre et de persuader les autres***. Il y a une évidente correspondance parmi les caractéristiques imposées aux schèmes de preuve et les pas de la strategie didactique (le *proof-eliciting problem*) utilisée par le professeur-chercheur à la même fois pour faire évoluer les schèmes de preuve et pour créer un contexte où ces

[6] Selon Harel et Sowder, une observation est un enoncé qui peut avoir le statut de conjecture ou de fait.

schèmes peuvent être observés—cependant cette correspondance ne semble pas être un objet de reflexión pour les auteurs.

Le résultat du travail de Harel et Sowder est une taxonomie des schèmes dont le principe de classification ne nous est pas donné. Les schèmes de preuve se divisent en catégories de conviction externe, empiriques, et analytiques; chaque d'eux se divisent encore dans une varieté de sous-categories (voir Harel et Sowder, 1998, p. 245). Par exemple, dans les schèmes de conviction externe, les auteurs placent les élèves qui se soumettent a l'autorité du professeur pour décider si une preuve est correcte, ceux qui jugent ce qui est une preuve ou non sur l'apparence formelle, et ceux qui utilisent volontiers les symbols méchaniquement sans attendre du sens. Les auteurs identifient ces schèmes comme des difficultés pour les étudiants qui sont dues à une mauvais pedagogie. Par contraste, les schèmes empiriques sont traités avec un peu plus de sympathie, mais aux étages superieurs de la taxonomie on rencontre les schèmes analytiques

Les schèmes analytiques sont ceux qui "valident des conjectures en utilisant des déductions logiques," mais les auteurs indiquent que ceci inclus plus que des preuves formelles déduites logiquement depuis un ensemble d'axiomes. Ils identifient aussi des sous-schèmes dits ***transformatifs*** qui utilisent une ample gamme d'opérations implicites (verbales et imagistiques) pour transformer les énoncés.

Il est implicite dans ce travail que le maître peut utiliser la taxonomie pour diagnostiquer l'etage d'évolution de ses élèves à propos de la preuve. Aprés, il peut décider quel traitement il faut leur donner pour les faire avancer vers des schèmes plus élaborées. Ce que le maître peut faire exactement, ils nous le suggèrent quand ils parlent du développement du principe d'induction comme un exemple des schèmes interiorisés—ou des schèmes encapsulés dans une méthode de preuve dont la personne qui les possede a pris conscience. Ce développement est attribué au projet didactique de "déràciner les schèmes de conviction externe des élèves." Ils sont partis de soupçoner que d'ordinaire les étudiants sont introduits très tôt à l'expression formelle du principe, et que les types de problèmes utilisés au début de l'enseignement du principe promouvoient une application basée sur la conviction externe. Une partie de l'experience d'enseignement a donc été la sélection d'une liste de problémes ordonnés de manière radicalment différente de ce qui est d'ordinaire dans les manuels. Ils nous disent quel est le critère pour ce nouveau classement: les problèmes doivent à la fois rendre inadaptés les autres méthodes de preuve et appeler une méthode avec les caractéristiques du principe d'induction.

Harel et Sowder reconnaissent que la réussite de cette suite de problèmes n'implique pas que les étudiants aient compris la necesité du principe d'induction. En fait, la nature de l'adaptation des étudiants à l'usage de la méthode d'induction ne se discute pas. On peut donc dire que **les auteurs voient comme nécessaire que le professeur sélectionne des situations qui demandent la construction des schèmes de preuve envisagés, mais qu'ils ne posent pas le problème sur la gestion de ces situations**.

En fait, la conception du travail du professeur qui est sous-jacente dans la recherche de Harel et Sowder maintient toujours invisible le rôle du professeur dans la gestion du contrat de preuve. J'examine le cas de Melissa, que les auteurs présentent comme l'ilustration des ***schèmes empiriques de sous-varieté perceptuelle*** et de la difference avec les schèmes transformatifs. Les schèmes perceptuels sont définis comme ceux qui produisent des observations par l'usage des images mentales rudimentaires, qui ne peuvent pas se transformer ou anticiper les résultats d'une transformation.

Le problème était de "Prouver que les milieux des cotés d'un trapèze isocèle sont les sommets d'un rhombe," et était accompagné d'une figure  (voir Harel et Sowder, 1998, p. 256). Melissa a commencé par affirmer que les diagonales sont congruentes et que ce pourrait être prouvé si on prouve avant que les triangles (determinés par chaque diagonale et deux des cotés du nouveau quadrilatere) sont congruents. Les auteurs disent que "l'intention de prouver que les diagonales sont congruentes était induite par la percepcion de la figure… dans laquelle les diagonales se voient congruentes." Peut être qu'en réalité la figure donnée était plus semblable à cette de la Figure 2?

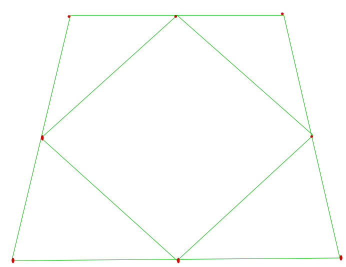


*Figure 2:* Le trapeze isoscele

Les auteurs informent que la classe a discuté l'affirmation de Melissa, indiquant que si on change le trapeze, les diagonales vont evidemment différer en longeur. Ils disent après que

> Il n'y a pas de doute que Melissa était capable de faire varier le trapèze…. En fait, Melissa a compris l'argument de ses camarades et était complètement d'accord. Cependant, la question est de savoir si Melissa aurait été capable d'initier elle-même un tel raisonnement transformationnel. (p. 257)

Cette note nous parait pertinente pour suggèrer que la réponse de Melissa peut être rattachée plus à un effet du contrat didactique qui à une caractéristique de ses schèmes de preuve.

En fait, les rapports entre preuve et figure sont complexes. **Les figures ne jouent pas seulement une rôle restrictif à un cas particulier. Elles servent aussi à la production des énoncés qui constituent une preuve. Les figures sont fréquemment à l'origine des observations empiriquement vraies pour lesquelles des formats de preuve, comme le format sur deux colonnes, aident à convertir en énoncés d'un texte deductif**. "Quelles sont les limites de la pertinence de ce que la figure "dit" par rapport à la production de la preuve envisagée" est une question délicat qui montre un point critique du travail du maître dans la gestion de la preuve.

En fait, quelquefois les énoncés vrais sur une figure s'impliquent nécessairement mais d'autres fois, comme dans l'exemple du trapèze, ils ont seulement lieu ensemble. Le choix d'une figure convenable par le maître est ce qui aide à maintenir ces contingences non pertinentes hors de la scène—il est très probable qu'un maître expérimenté aurait dit que la figure donnée par Harel n'était pas la meilleure qu'on pouvait avoir utilisée.

Du point de vue de l'enseignant, il y a une opposition possible entre adopter

1. une option "collaborative" qui en donnant une figure moins ambigu garantie la production de la preuve correcte mais en contrapartie ne pourrait qu'accepter une responsabilité dans cette production
2. une option "conflictive" qui en donnant une figure ambigu sert de contexte pour l'utilisation de la part de l'élève des transformations sur la figure mais comme contrapartie elle donnera lieu aussi à des réponses trompeuses dues à la perception

L'option "conflictive" permet à Harel d'observer les arguments qu'utilisent des transformations de la figure et les rendre compte comme témoignant d'un schème psychologique. Mais cette explication lui requiert effacer les traces didactiques dans las conditions de l'observation: Si les schèmes transformationnels ou perceptuels sont des objets psychologiques, son contrôle ne peut pas être dans un rapport entre sujet et figure établi par le maître.[7]

Alors j'ai affirmé que la recherche de Harel et Sowder mantient invisible le rôle du maître dans la gestion du contrat: la possibilité de donner aux étudiants l'opportunité de lui montrer qu'ils ont construit le schème transformationnel existe seulement à fur et à mesure qu'il existe un contrat "collaborative" avec lequel établir une rupture. Comme nous avons dejà dit, cette rupture pouvait être attribue à un "erreur" du professeur ('Melissa s'est trompée parce la figure était trompeuse'). L'intention des chercheurs d'attribuer les réponses aux caractéristiques des étudiants implique de nier l'existence de ces deux options, ou reivindiquer l'innocence de la gestion du professeur.

**L'analyse du cas de développement de l'induction mathématique comme une méthode de preuve montre que Harel et Sowder identifient le maître comme responsable de la réorganisation didactique du savoir. L'analyse du cas de Melissa nous montre aussi que cette étude évite de conceptualiser le rôle du maître dans la gestion du contrat didactique.** Ces caractéristiques rendent cette étude, d'un certaine façon, extrêmement utile pour les maîtres qui peuvent ainsi maintenir la fiction d'une division de tâches, didactiques hors de la classe, pédagogique-administratif à l'interieur de la classe—une aliénation d'une certaine façon encouragée par quelques ideologies de reforme qui se centrent sur la cognition des étudiants. Ces caractéristiques aussi permettent à Harel de jouer à la fois le rôle de professeur et de chercheur. Il devient possible de libérer au chercheur du risque de reconnaître que les adaptations de l'élève, même en situations qui suivent les idéologies courantes, pourraient répondre plus à des indications du maître qu'au fonctionnement des connaissances mathématiques de cet élève.

[7] Il est plausible que Melissa avait vue l'exercise comme une occasion pour utiliser le methode de triangulacion, confident que si elle répond aux suggerences perceptuelles de la figure et suive les pas usuelles du methode, elle va aboutir au fin cherché.

*Eric Knuth: Conceptions de la preuve des enseignants de secondaire*

La thèse d'Eric Knuth[8] est une des rares études qui s'approchent à la preuve du point de vue de l'enseignant. L'étude est aussi un des nombreux travaux qui s'intéressent aux connaissances et croyances privées des maîtres. C'est la logique sousjacente à cette dernière classe d'études qui sert à Knuth pour justifier la sienne: les réformes promues par le NCTM demandent en particulier que la classe développe un rapport différent à la démonstration; ces pratiques ont besoin de maîtres avec un profil professionel qui inclut des conceptions sophistiqués de la preuve. Il nous dit que "la réussite de ces efforts de réforme dépendent dans une grande mesure de la nature des connaissances et croyances des maîtres" (Knuth, 1999, p. 8).

Le cadre théorique de Knuth est un cadre général qui essaie de rendre compte des connaissances professionelles des maîtres sur la discipline qu'ils enseignent et sur l'activité pour l'enseigner. L'étude répond à l'appel de Lee Shulman de prendre en compte le savoir à enseigner et utilise l'idée de Shulman que les maîtres agissent sur la base d'une variante pedagogique du savoir académique.[9] A la fois, le travail de Knuth forme part de la reaction contre les recherches observationnels sur l'enseignement qui étaient caracteristiques du paradigme process-product (effective teaching[10]): Le résultat est une enquête qui considère le point de vue de l'enseignant comme équivalent à ce que l'enseignant sait personnellement, sa réflexion, ses croyances—faisant l'hypothèse que ces catégories filtrent les essais des maîtres pour appliquer la réforme. La preuve mathematique est choisie comme un exemple intéressant, parce qu'elle présente l'opportunité d'éxaminer en même temps quelles mathématiques connaissent les maîtres et qu'est-ce qu'ils savent sur les mathématiques comme discipline.

L'étude examine les conceptions des maîtres sur la preuve—par l'usage du mot *conception*, Knuth se refère à l'ensemble des connaissances et des croyances. Knuth procède sur la base d'entretiens avec les maîtres qu'il interroge sur la démonstration, pose des problèmes où ils doivent faire des démonstrations, et leur demande de comparer et juger des preuves différentes d'une même proposition. Les résultats de ces entretiens sont utilisés pour décrire ce que les maîtres connaissent et croient sur la nature et le rôle de la preuve dans les mathématiques académiques et dans les mathématiques scolaires—Knuth utilise les catégories fonctionnelles de Gila Hanna[11] (preuves qui convainquent, preuves qui expliquent, preuves qui prouvent) pour classifier les conceptions des maîtres sur le rôle de la preuve. D'autre part, l'auteur examine les schèmes de preuve des maîtres—et pour ça il prend la notion de schème de preuve et les éléments fondamentaux de la taxonomie dans le travail de Harel et Sowder.

[8] Eric J. Knuth (1999). The nature of secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. Unpublished doctoral dissertation. University of Colorado, Boulder.
[9] Pedagogical content knowledge. Véase Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher.15(2), 4-14.
[10] Voir par exemple Brophy, J. (1986). Teaching and learning mathematics: Where research should be going. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*, 323-346..
[11] Hanna G. (1983) Rigorous proof in mathematics education. Toronto : The Ontario Institut for Studies in Education..

Knuth observe que la réforme cherche à effacer les difficultés des étudiants avec la démonstration. La réforme promouve que les étudiants agrandissent et affinent leurs propres conceptions de ce qui constitue évidence et justification en mathématiques, et finalement arrivent à comprendre et apprécier la démonstration, et à produire des démonstrations eux-mêmes. Donc, la viabilité et le contrôle de la réforme demande de savoir si les enseignants sont en condition de fournir aux étudiants des contextes dans lesquels ils peuvent se développer. Knuth cherche à décrire les conceptions des maîtres sur la preuve pour fournir une réponse à cette question. Nous ne pouvons pas nier que les conceptions des maîtres ont de l'importance; mais de mon point de vue, il est crucial d'avoir une manière de contrôler théoriquement le domaine et les conditions d'opération de ces conceptions personnelles—de telles questions ne sont pas objet de discusion dans le travail de Knuth.

Cette étude a produit quelques résultats intéressants. Knuth observe que pour ces maîtres, il y a des preuves formelles, des preuves moins formelles, et des preuves informelles dans les mathématiques scolaires. Les mêmes maîtres partagent la croyance que dans les mathématiques académiques toutes les preuves sont formelles. Les maîtres placent les preuves formelles comme faisant partie du savoir à apprendre dans les cours de géométrie pour les élèves les plus capables, tandis qu'ils classifient les preuves moins formelles comme des stratégies pour répondre à la question "pour quoi?" en outres domaines des mathématiques ou pour les élèves les moins capables. A la base de ce que les maîtres indiquent sur leurs propres pratiques d'enseignement, Knuth nous offre deux observations que je considere intéressantes:

(1) que lorsque les maîtres acceptent des preuves informelles en classes autres que géométrie, ils n'ont pas la coutume de suivre la question pour considerer les limites de ces preuves avec les éleves

(2) que dans les classes de géométrie, ce qui est une "justification acceptable" est toujours une preuve formelle (sans demander qu'elle soit convaicante), tandis que dans d'autres classes (incluant celles de géométrie pour les élèves moins capables) une "justification acceptable" est toujours quelque chose qui convainc.

A propos du rôle que les maîtres attribuent à la preuve, Knuth nous informe qu'il y a peu de maîtres qui considèrent la preuve comme un instrument pour comprendre les mathématiques. La majorité considère que la preuve fonctionne dans les mathématiques académiques pour construire le savoir et établir la vérité, tandis qu'il fonctionne à l'école pour promouvoir l'autonomie des étudiants et développer ses facultés de pensée logique.

Knuth utilise ces constats pour élaborer des recommandations pour l'action. Il nous dit que pour pouvoir espérer que la réforme ait lieu, il faut agrandir les conceptions des maîtres sur la preuve, et que cette tâche doit être partagée par des mathématiciens qui enseignent des mathématiques aux futures maîtres et par des éducateurs qui leur donnent la formation pédagogique. Compte tenu de la tendance des maîtres de voir l'apprentissage de la preuve comme un objetif pour des élèves plus capables, Knuth recommande que la formation des maîtres insiste pour montrer que la preuve joue un rôle crucial pour la compréhension des mathématiques ou outrement dite pour éclairer les connaissances.

De manière similaire au travail de Sam Ireland, le travail de **Knuth s'addresse à l'administration éducative—une audience que s'intéresse à la performance du système educatif**. Le fait que les méthodes conductistes utilisés dans le passé pour évaluer des maîtres sont devenus discutables a présenté un problème sérieux à l'administration—Comment contrôler la gestion du système educatif? Les Standards promouvoient une réforme non pas sur la base de pression pour réussir aux tests, mais sur la base de la conviction des maîtres qu'il faut enseigner de façon différente.

Le travail de Knuth est crucial pour montrer quel type de contrôle de gestion du système educatif est compatible avec la réforme. Ainsi, il nous donne des résultats qui servent au processus de prise de décisions sur la formation des agents loyause à la réforme et peut-être des méthodes qui aident au processus de supervision des maîtres du point de vue de l'idéologie de la réforme.

L'administration peut apprendre de cette étude qu'il faut persuader les maîtres du fait que la preuve éclaire les connaissances mathématiques et alors de qu'il faut qu'ils l'intégrent à tous les classes des mathématiques. Mais le travail du maître demande confronter cette possible conviction personnelle avec les conditions de la possibilité de l'action. J'ai montré ailleurs[12] que l'usage normatif du format de preuve sur deux colonnes avait constitué un critère de sélection de que l'on peut donner à prouver par l'élève. Je viens de faire une observation comparable sur le travail de Fawcett et son methode de la "nature of proof." Il est possible d'imaginer que la conviction des maîtres sur un autre rôle privilégié de la preuve, dans ce cas celui "d'éclairer les connaissances," pouvait se constituer en un autre critère de sélection de ce qu'on peut donner à prouver. Mais ces effets de la gestion des connaissances dans la classe echappent à ce que les categories ideologiques de la réforme nous permettent d'observer.

*Commentaire sur les études de Harel et Sowder et de Knuth*

Un premier point en commun entre les deux études est que l'intérêt de la preuve est pour eux une spécialisation postérieure à la choix d'un objet d'étude (l'apprentissage chez Harel et Sowder, l'enseignement chez Knuth) et à l'identification d'un tel objet avec ses agents materiels (respectivement les étudiants et les maîtres).[13] Les deux études appartiennent à une forme d'organisation du travail académique qui est habituel en éducation et aux Etats-Units: L'objet d'étude n'émerge pas d'une construction rationnelle mais est emprunté au discours de l'action éducative. Dans le cas de Knuth, ce discours de l'action est le discours de la réforme, à laquelle l'étude donne des éléments pour contrôler la gestion du système educatif. Dans le cas de Harel et Sowder, ce discours de la action est le discours d'un enseignant qui opére à l'interieur de la réforme, et à qui l'étude donne des

---

[12] Voir Herbst (1999b).

[13] En efecto, el interés de Harel y Sowder se basa en las dificultades de los estudiantes con la demostración observadas durante la práctica docente. La demostración existe allí en paralelo con casi cualquier otro *concepto* (así llaman ellos a la demostración) que forme parte de la organización del saber a enseñar. El interés de Knuth, por otra parte, se basa en las posibilidad de que la demostración ejemplifique los aspectos en los que los generalistas de la educación se refieren a las concepciones de los docentes sobre las disciplinas a ser enseñadas.

éléments qui lui permettent d'évaluer et faire évoluer les conceptions des étudiants d'une façon consistente avec le rôle que l'idéologie de la réforme lui assigne.

Les deux études assument une notion similaire de preuve pour ses études des étudiants et des maîtres. La preuve est un argument capable de convaincre à la fois à celui qui l'offre et à son public. Les preuves qui se classent sous schèmes empiriques ou analytiques sont plus solides que ceux qui répondent à des schèmes de conviction externes parce qu'elles satisfaissent la condition de convaincre à qui las soutienne. Les preuves qui répondent à des schèmes analytiques sont plus efficaces que les empiriques par rapport à la persuasión du public—parce qu'elles tolèrent moins d'objections. Voilà un possible argument pour justifier que la notion de preuve comme conviction utilisée dans ces études ne contredit pas la notion de démonstration en mathématiques. Au début on serait tenté d'acceptér aussi que cette notion de preuve soit compatible avec celle proposée par Balacheff[14]: "Nous appellons preuve une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné." Pourtant, la définition de Balacheff attache un rôle épistémologique à la communauté qui reçoit une telle explication. En fait, la cite suive: "Cette décisión peut être l'objet d'un débat dont la signification est l'exigence de déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs." Notre question est donc, à quel type de communauté s'addressent les preuves produites par les étudiants de Harel et Sowder, ou virtuellement témoignés par les maîtres entrevus par Knuth? Si une affirmation proposé par quelqu'un demande un argument convainçant, à quel problématique répond la nécesité de savoir si telle affirmation est vraie ou non ou même si elle mérit d'être considerée?

Donc nous pouvons nous poser quelques questions pour lesquelles nous ne croyons pas que ces études peuvent apporter une réponse. A propos de l'étude de Harel et Sowder, Comment exactement fonctionnent les problèmes dans la classe pour reussir au but que la communauté qui reçoit (ou l'individu qui produit) un argument agisse sur la base de critéres propres de la rationalité mathématique? En particulier, comment l'observateur s'assure-t-il que les comportements qui s'attribuent à des schèmes analytiques ne témoignent en realité de la compréhension par l'élève de "qu'est-ce que le professeur veut que je fasse ici"?

A propos de l'étude de Knuth, quel est le rapport entre les fonctions qu'un professeur reconnait à la preuve et le fonctionnemment de la preuve dans sa classe? Comment garantit-on que ces arguments convaincants qui, du point de vue du maître, éclairent les concepts mathématiques produisent le même effet dans la communauté de la classe? Réciproquement, quels éléments sont disponibles pour comprendre ce que le maître fait quand les arguments convaincants qui fonctionnent pour "éclairer les concepts mathématiques " dans la classe ne gardent pas de rapport avec ce que l'enseignant pourrait reconnaitre comme une preuve?

Je considère que le fait qu'aucune de ces deux études ne s'occuppent d'une théorisation explicite du rôle du maître dans la gestion des connaissances laisse ces questions en suspend. Elles sont néanmoins des questions importantes pour les finalités

[14] Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation [Processes of proof and situations of validation]. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 147-176.

pragmatiques de ces études. Dans quelle mesure la recommandation de s'appuyer sur ce que les élèves reconnaissent comme convaincant aide à travailler mieux sur les difficultés qu'ils ont avec la preuve? Dans quelle mesure le fait que le maître était personellement ouvert à une conception sophistiquée de la preuve aide à que les étudiants s'occuppent réellement de produire des arguments et des preuves mathématiques ?

**TROISIEME PARTIE**

## Le travail du maître dans la gestion d'une situation de preuve

Le compte rendu des travaux de Harel et Sowder et de Knuth avait comme but de montrer des formes canoniques selon lesquelles les chercheurs américains s'ont approchés de la preuve. Alors, quelques *mathematics educators* ont commencé à renouveller leur interêt à etudier la pratique,[15] en utilisant des théories et méthodes du constructivisme social, de l'analyse du discours, ou de l'interactionisme symbolique. En particulier, un groupe de chercheurs américains et allemands associés avec Paul Cobb et Heinrich Bauersfeld,[16] ont développés des éléments interprétatifs qui sont utiles pour une discussion sur l'enseignement de la preuve et sur lesquelles ma thèse prend appui.

*Normes Sociomathematiques*

Ces chercheurs ont travaillé en collaboration avec des maîtres d'école élémentaire pour preparer un curriculum dans lequel les élèves pouvaient apprendre mathématiques d'une façon investigatrice, collaborative, et autonome. Les activités projetées demandaient toujours aux élèves de fournir des explications pour leur réponses et d'argumenter avec leurs camarades; il était aussi demandés aux enseignantes d'éviter de donner une évaluation aux réponses des élèves. A l'heure d'analyser les enregistrements vidéo de ces classes, les chercheurs ont rencontré des difficultés qui les ont fait réflechir sur le rôle du maître dans la validation des connaissances. Ils ont observé que les maîtres travaillaient sous des contraintes au delá de ceux du projet de recherche—des contraintes originés de son propre sentiment de responsabilité didactique tendant à légitimer le savoir officiel et à maintenir un fonctionnement 'civilisé' à l'interieur de la classe.

Les chercheurs ont emprunté à la sociologie l'idée des ***normes sociales*** pour se référer à des régularités normatives qui s'appliquent à l'interaction sociale établi à propos des activités mathematiques.[17] La constitution de ces normes était initialisé par le maître mais développé en interaction avec les élèves, dans un processus de négociation. Par exemple, Terry Wood[18] nous dit que la maîtresse avait utilisé des exemples pour expliquer

---

[15] Citons entre d'autres les travaux sur l'enseignant de Deborah Ball, Daniel Chazan, Magdalene Lampert, et l'approche etnographique de la preuve en classe de geometrie par Yasuhiro Sekiguchi.

[16] Le groupe des chercheurs inclut Paul Cobb, Erna Yackel, Terry Wood, Heinrich Bauersfeld, Jörg Voigt, et Götz Krümmheuer. L'ouvrage *The Emergence of Mathematical Meaning*, coordoné par Cobb et Bauersfeld (1995, publié par Erlbaum) contient des travaux de chaq'un de eux. Des autres references importantes sont apparus à le Journal for Research in Mathematics Education et aux Proceedings des PME et PMENA.

[17] Yackel, E., Cobb, P., & Wood, T. (1991). Small-group interactions as a source of learning opportunities in second-grade mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*, 390-408.

[18] Wood, T. (1999). Creating a context for argument in the mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education 30*, 171-191.

aux élèves la différence entre des désaccords (ou des arguments) qui étaient personels et des désaccords sur les idées mathématiques. Aprés, la maîtresse et les élèves ont negocié un protocole pour que les étudiants pouvaient utiliser quand ils étaient en désaccord sur les mathématiques—dans ce protocole, les mots comme *mal* ou *faux* étaient interdits parce qu'ils pouvaient occasionner des désaccords personels.

Pour décrire des régulations commencées par le maître qui allaient au-delà de ce qu'ils considérent comme interaction sociale, les chercheurs ont introduit la notion de normes sociomathématiques. Jörg Voigt[19] les define en disant que:

> Les normes sociomathématiques décrivent les critères de valeur qui s'appliquent aux activités mathématiques. Les normes sociomathématiques … facilitent les efforts des élèves pour conduire leurs activités dans un milieu qui stipule une certaine liberté pour interpreter et résoudre des problémes mathématiques.

Erna Yackel et Paul Cobb[20] nous donnent quelques exemples des normes sociomathématiques disant:

> Des accords normatifs sur ce qui est mathématiquement différent, mathématiquement sophistiqué, mathématiquement efficace, et mathématiquement élégant sont des normes sociomathématiques. De la même manière, ce qu'est une explication ou une justification mathématiquement acceptable est une norme sociomathématique.

Ils nous disent que les normes sociomathématiques sont constituées interactivement parmi les participants de la classe, et qu'elles sont des formes subtiles avec lesquelles le maître peut accomplir sa responsabilité de représenter la communauté des mathématiciens.[21]

Les éléments de théorie identifiés par ce groupe de chercheurs me semblent productifs mais un peu apologétiques. Les actions du maître sont justifiées comme moralement nécessaires pour créer et maintenir un contexte social où on peut fournir les opportunités d'apprentissage projetés. Il me semble que les chercheurs travaillent sur l'hypothèse que le travail du maître pour établir des normes est seulement un raffinement logistique necessaire, qui sert à la construction des savoirs dans le sens envisagé par le groupe de chercheurs.

Pourtant, à propos de la validation, les exemples qu'ils donnent semblent encourager qu'on discute cette hypothèse—notons seulement l'exemple du dialogue de Mr. K avec Donna (Yackel & Cobb, 1996, pp. 468-469). Dans l'episode le maître Mr K. demande a Donna son prenom, et elle repond Donna; Mr K. demande qu'est-ce qu'elle va dire s'il le dis que son prenom est Mary et Donna insiste que son prenom est Donna. Finalement, Mr. K derive la leçon morale par le voie d'une analogie: De la meme façon que elle insiste que son prenom est Donna et pas Mary, si elle croie que la reponse est 6 elle doit la maintenir. Cet episode nous est offri comme un exemple de ce qui le maître fait

---

[19] Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. In P. Cobb & H. Bauersfeld, op. cit.
[20] Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 458-477.
[21] Voigt, op cit.

pour établir la norme de que les raisons pour prendre une décision (dans ce cas, la décision de Donna de retirer sa réponse 6 de la discusion au sein du groupe) doivent être des raisons mathématiques et non pas sociales (dans ce cas, Donna ne devrait pas avoir pris sa décision sur le fait que le maître ne s'était pas apperçu de sa proposition).

L'interprétation des chercheurs est probablement en accord avec l'explication que le maître pourrait fournir de ses actions aprés coup. Néanmoins, l'explication évite de rendre compte des conditions qui ont invité, ou même contrainte, le maître à choisir cette analogie au lieu d'utiliser une autre stratégie. Et si des autres stratégies pourraient être disponible pour le maître, quelles seront-elles? L'explication évite aussi de rendre compte des transformations de l'objet de connaissance qui deviennent possibles par l'usage de cette analogie: Dans quelle mesure l'analogie introduite par le maître pour résoudre cet contingence favorise l'usage des mêmes arguments extra-mathématiques qu'elle veut combattre? Du point de vue du maître, est-ce que c'est un risque qui vaut la peine d'être couru?

La notion des normes sociomathématiques telle que ces chercheurs l'ont conçu est utile pour décrire l'efficacité du maître pour finalement obtenir, sans l'usage explicite d'autorité, les réponses esperées de part de l'élève. Mais de tel notion ne semble pas encore être suffisante pour expliquer pourquoi ces actions du maître sont nécessaires ou quel est le statut épistemologique de ces actions du point de vue de la classe. Au regard de la description du processus de preuve d'un énoncé, en particulier, il serait possible de retrouver le développement des normes sociales et sociomathématiques. Mais cette approche ne reconnait pas que si l'interaction entre proponent et opponent est regulée comme un dialogue poli que n'oblige pas aux interlocuteurs, alors les actions du maître tendant à guider la discussion vers l'explication optimale peuvent légitimement être interprétés par les étudiants comme un favoritisme personnel.

En revanche, ce qui est interessant de la notion des normes sociomathématiques c'est qu'elle permet de penser le developpement d'une coutume de preuve. Une coutume que d'emblée n'a pas assez des régles comme une commaunauté scientifique mais qui a des dispositifs qui permettent-la se rapporter progressivement aux standards de la commaunauté mathématique.[22]

*Une proposition alternative: Normes sociomathématiques et normes sociodidactiques*

Mon travail de thèse s'est développé autour de la question: Quelles sont les régulations qui déterminent ce qui fonctionne comme preuve dans les classes de mathématiques ordinaires? Au début, une telle question semblait être une opportunité pour utiliser la notion de normes sociomathématiques pour décrire et expliquer le rôle du maître dans la gestion des processus de validation. Les réflexions que j'ai esquissé dans le paragraphe antérieur m'ont conduit à proposer une reformulation de la notion de normes sociomathématiques et à chercher à développer des moyens plus analytiques

[22] Sur la notion de *coutume*, voir Balacheff, N. (1988a). Le contrat et la coutume: Deux registres des interactions didactiques. In C. Laborde (Ed.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathematiques et de l'informatique* (pp. 15-26). Grenoble: La Pensée Sauvage. Voir aussi Herbst (1999b), op cit.

qu'apologétiques pour analyser le travail du maître relatif à la validation. Mon point de départ était l'hypothèse que le maître ne peut pas toujours être vu comme le seul représentant de la communauté des mathématiciens: C'est à dire, les actions du maitre ne peuvent pas etre interpretés par les chercheurs comme des actions 'en defense des mathematiques.' Par contre, j'ai fait l'hypothèse que le travail du maitre engage plus qu'une seule rationalité. Donc, un but important du travail a eté de chercher une manière de décrire les différentes rationalités qui sont à la base des actions du maître dans la gestion d'un contrat local qui permet la production d'une preuve acceptable. En particulier, d'exemplifier comment est que ces differentes rationalités operent pour decider qu'est-ce qu'on peut donner à prouver.

La travail de Claire Margolinas[23] m'a fourni une distintion fondamentale entre *validation* et *évaluation* comme les extrêmes qui sous-tendent le rôle du maître dans son travail pour donner un statut aux connaissances produites par la classe. Cette distintion permet de penser la situation du maître par rapport à la production d'une preuve comme la résultante de jeux superposés, chacun d'eux soumis à des régulations différentes, et ayant lieu sous deux types de contraintes: que les arguments fournis soient acceptables du point de vue du savoir à enseigner et que les arguments à fournir soient possibles du point de vue de la rationalité disponible chez l'élève.

L'analyse en terme de structuration du milieu[24] m'a servi pour conceptualiser l'espace de travail de deux rationalités différentes comme des jeux — un jeu mathématique et un jeu didactique. Ainsi, j'ai proposé d'identifier les normes sociomathématiques de Voigt aux éléments d'une rationalité mathématique qui règle les actions possibles du sujet dans la situation adidactique, et j'ai proposé l'expression ***normes sociodidactiques*** pour identifier les éléments d'une rationalité didactique qui régle les actions possibles du maître (et de l'eleve en tant que sujet universal) dans la situation métadidactique.

Dans le modèle théorique des situations adidactiques de preuve, le milieu de l'élève est un milieu social. La preuve, nous dit Balacheff (1987), est une explication de la validité d'un enoncé qui s'offre à une communauté et qui s'assujettit à un système de validation accepté par cette communauté. Dans la classe que l'on observe, le maître peut aussi jouer le rôle de milieu pour l'élève, mais pas toujours et pas en disant 'n'importe quoi.' Je propose de reserver la notion des normes sociomathématiques pour parler de ces normes qui règlent les actions et les réactions qui sont possibles dans l'interaction entre le sujet qui prouve et le milieu antagoniste. D'une part, elles sont le résultat du projet du maître, d'autre part elles obligent le maître à un certain assujettissement. Ainsi, d'un coté les réactions "naturelles" du milieu peuvent servir à l'élève comme critère pour poduir une preuve ou décider de la validité de ses actions. D'autre coté, l'usage assujetti des lois de cette "nature" sert à l'enseignant comme un moyen pour amener l'élève à produire la preuve en question avec le sens de preuve envisagé. Les normes sociomathématiques, définissent donc un domaine de légitimité à l'intérieur duquel ce que le maître dit ou fait

[23] Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathematiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
[24] En particulier, les travaux de Claire Margolinas.

est vu comme ce que ***quelq'un pourrait avoir dit ou fait***.[25] En particulier, à l'intérieur des limites de ce domaine il peut se développer un processus de négociation sur les mathématiques où les partenaires enseignant et élèves disent ou font des choses qui ont un statut comparable.

Les normes sociodidactiques, d'autre part, seront des normes que règlent les connaissances qui émergent de l'interaction entre le maître qui prepare sa classe et son milieu—la situation didactique. Le rôle du maître répond au besoin de mettre en place une intervention qui permette à la classe la prise en charge de la production d'une preuve et qui permette au maître de reconnaître une preuve dans cette production. Dans la mesure où les décisions prises dans cette situation métadidactique fournissent une réponse aux deux contraintes citées plus haut,[26] la situation et les changements de contrat projetés servent au maître comme des moyens (économiquement) optimaux pour susciter les comportements envisagés chez l'éleve. Ainsi, par exemple, le choix que le maître fait parmi des énoncés alternatifs à un énoncé à prouver peut se voir comme le résultat d'un processus d'optimisation où l'alternative choisie est celle qui satisfait au mieux les contraintes qui pèsent sur le maître et qui permet d'établir une situation viable pour les élèves. A fin d'examiner si cette conceptualisation peut aider à la description du travail du maître, je présente dans la suite des extraits de l'analyse de l'un des épisodes qui font parti du corpus de données de ma thèse.

*L'episode sur la somme des angles d'un triangle*

L'episode que je présente se développe dans une classe de 9th grade en mathématiques intégrés—j'apelle l'enseignante Andy. L'episode a été enregistré en vidéo et il s'agissait du développement d'une deuxième preuve du théorème sur la somme des angles d'un triangle, qui avait été posé comme exercice à faire à la maison. La classe avait originalement etudié le théorème comme il est présenté dans le manuel, où le théorème est une des points importants d'une section qui débute avec l'énoncé du postulat des parallèles. En préparation du terrain pour le théorème, le texte évoque des expériences passées dans lesquelles les étudiants ont plié des triangles en papier pour joindre les trois sommets à un point commun. Ce type d'expériences a suggeré aux étudiants que la somme de ces angles peut être 180 degrés.

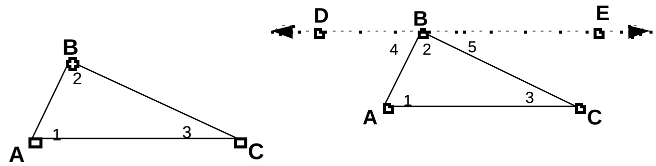
Le théorème de la somme des angles d'un triangle est énoncé et le manuel annonce que "le postulat de l'unique droite parallèle va t'aider à prouver ça utilisant un raisonnement deductif." Le manuel offre une preuve sur deux colonnes à la page suivante comme "réponse possible;" la preuve se réfère au triangle *ABC* (see Figure 3a) et la tâche s'identifie comme celle de prouver que "$m$ 1 + $m$ 2 + $m$ 3 = 180°." Avant de continuer

[25] Así, por ejemplo, el uso del formato de dos columnas en la producción de una prueba permite al docente ciertas acciones—interrumpir al alumno en ciertos momentos a preguntarle "por qué" sin que la pregunta signifique para el alumno una sanción negativa, corregir algunas razones dadas sin que la corrección implique una evaluación, requerir en ciertos momentos que otro alumno continúe sin que ello signifique una evaluación del curso de la prueba.

[26] Que les arguments fournis sont acceptables du point de vue du savoir á enseigner et que les arguments á fournir sont possibles du point de vue de la rationalité de l'eleve

avec la preuve, et sous le soustitre “Faire un projet en avance,” le manuel nous donne la Figure 3b et suggère le procedé suivant:

> Tracez une droite auxiliaire parallèle à $\overline{AB}$ et qui passe par *B.* Après, utilisez des angles alternes internes et le postulat sur le tout et les parties pour montrer que la somme des mesures des angles d’un triangle est égale à la somme des mesures des parties d’un angle plat.




*Figures 3a and 3b*: Données avec la première preuve du theoreme.

L’episode que j’ai enregistré consiste en une discussion sur la solution d’un des exercices qui demande aux étudiants d’“utiliser la figure à droite [Figure 4] pour donner une preuve du théorème sur la somme des angles d’un triangle.”

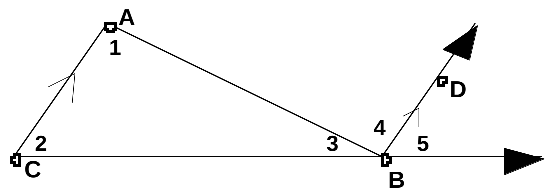



*Figure 4*: Donnée pour la deuxieme preuve du theoreme.

Le manuel nous présente le résultat d’une décision qui appartient à la situation metadidactique (même si la personne qui a redigé le manuel n’est-ce pas Andy) et qui se rapporte à deux des sujets dont on a parlé plus haut: Qu’est-ce qu’on peut donner à prouver et qu’est-ce qu’on peut recevoir comme preuve? Une première question que je me pose est: Pourquoi, si l’énoncé à prouver prend du sens par rapport a des actions de plier un triangle de papier, la preuve proposée par le manuel n’utilise rien de cette idée?

Si le choix avait été d’utiliser le contexte de plier un triangle de papier pour dévoluer une situation de preuve, le maître aurait aussi été responsable de fournir des éléments pour une discussion s’il est toujours possible de rencontrer un point où les trois angles vont être coté à coté. La réussite en pliant un triangle de papier n’est pas un exemple générique prêt-à-porter. S’il aurait choisi cette voie, le maître aurait aussi eu besoin d’installer un forme de questionner l’effectivité des actions de plier le papier afin de que les raisons qui font que la solution est toujours possible viennent au fond. En particulier, le fait que le pli qui determine le coté où les trois angles se rencontrent est parallèle à ce coté est une pièce cruciale pour la preuve mais ce fait n’émerge pas explicitement des actions de plier. Les conditions de possibilité pour que l’élève puisse accepter la responsabilité de faire ou même de lire une preuve en partant de l’idée de plier demandent que le maître organise un milieu qu’impose un travail explicite de mathématisation de certaines actions. Ainsi, la *preuve-en-pliant* pourrait avoir été dévolue mais les normes sociomathématiques à être negociées auriont besoin de s'appuyer sur la rationalité d'efficacité du milieu d'action aussi même que contredire cette rartionalité pour favoriser la rationalité de rigueur du milieu de preuve. Cette coûteuse negociacion pourrait echouer et le prix pourrait être une reduction significative de la part de l'étudiant dans la division du travail, ou sinon l'acceptacion du maître d'un effet Jourdain.

En contraste, l'idée de prouver le théorème moyennant l'utilisation d'une droite auxiliaire parallèle et des proprietés des angles determinés entre parallèles coupées par une transversale utilise un triangle qui peut s'accepter (c'est-à-dire, que le maître peut tolérer) comme générique. Donc, on peut voir le choix de dévoluer la *preuve-avec-parallèle* comme une décision rationnelle de la part du maître qui projette la leçon. Le choix qui répond mieux à deux des contraintes du maître: la necesité de fournir une opportunité pour l'élève d'acceder à une preuve valide et la necessité d'installer un milieu contre lequel l'élève peut reussir à developper un argument (on prend ici cet 'argument' à valeur nominal, mais le sens doit etre analysé). Pourtant, la choix entraîne des risques pour le maître: Combien d'ambiguïtes par rapport à la prise en compte de la generalité de la preuve de la part de l'élève et par rapport a la signification du théorème peut tolerer le maître?

Demander aux élèves a faire une deuxieme preuve comme exercice est une opportunité pour reduir une telle ambiguïté: Si l'élève réussit à prouver le théorème et s'il utilise une parallèle par un autre sommet, cela pouvrait permettre au maître d'affirmer que la preuve a été comprise comme général. Donc, l'énoncé de cette tâche ("utilisez la figure a droite [Figure 4] pour donner une preuve du théorème sur la somme des angles d'un triangle") peut se voir comme un choix parmi un champ de possibilités qui inclut les suivantes.

1. Prouvez le théorème sur la somme des angles d'un triangle.
2. Quelle-est la somme des angles d'un triangle? Justifiez votre réponse.
3. Prouvez le théorème sur la somme des angles d'un triangle d'une façon différente.
4. Utilisez la figure donnée pour prouver le théorème sur la somme des angles d'un triangle.
5. Prouvez le théorème sur la somme des angles d'un triangle en traçant la parallèle auxiliaire par le sommet ….
6. Identifiez des parallèles et des transversales dans la figure donnée, cherchez des angles congruents, et montrez que ….

On peut conjeturer que plusieurs d'entre elles ne sont pas choisies pour certaines raisons. La premiere alternative pourrait obtenir une reproduction verbatim de la preuve déjà etudié. La deuxieme (comme des variantes qui n'utilisent le mot *preuve* dans cet coutume de preuve) n'offre pas de garanties que la justification de l'élève sera comparable avec ce qui était etudié auparavant (*un triangle*, en particulier, peut être interpreté comme un seul triangle, et la justification pourrait être une addition des mesures des angles). La troisieme n'offre pas de garanties que l'élève pourra produire rien. Les deux dernieres semblent trop directives, laissant une trop petite part à l'initiative de l'élève. Il semble que l'élément suffisant que l'on doive fournir et qui garantit que l'élève puisse produire une preuve acceptable soit la droite auxiliaire. Reciproquement, pour que le maître puisse affirmer que c'est l'élève qui donne la preuve, le statut de cette ligne donnée ne peut pas être revelé explicitement (en general, l'exercise ne peut pas etre exactement comme l'exemple donné).

L'analyse que j'ai esquissée cherche à donner une génese rationnelle à quelques décisions du maître (ou du système enseignant)—décisions qui correspondent à l'organisation d'une intervention didactique que permet la dévolution d'une situation de preuve et l'institutionalisation des productions qui en résultent. De telles décisions sont valides dans la mesure où elles optimisent la réponse du maître aux conditions structurelles de son travail: Ainsi, les normes sociodidactiques sont des critéres pour cette optimisation et constituent une des rationalités à la base du travail du maître dans la classe. Cette rationalité est la responsable du maintien du projet didactique et, en particulier, reprennant la formulation de Voigt, elle interpelle le maître comme le représentant de la communauté des mathematiciens dans la classe. Parmi ces critères il y a ceux qui guident l'installation d'un milieu material contre lequel une situation de preuve peut être définie, et ceux que définissent des catégories pour que le maître donne du sens à ses observations et analyse les actions des élèves.

Comme je l'ai proposé plus haut, les normes sociomathématiques delimitent le champ de legitimité des actions du maître que l'on peut attribuer au milieu. Dans la situation qui nous occupe, le choix d'une situation de preuve à partir de l'utilisation d'une droite parallèle auxiliaire est possible parce que les proprietés des angles determinés par une transversale que coupe plusieurs parallèles sont connues de la classe. Ces proprietés permettent là une relation d'*inspection* (par opposition à une relation d'*action*) entre l'éleve et la figure, et contrôlent la validité des décisions de l'élève. Notons que, d'une part, dès que l'élève est mis en ce type de rapport avec la figure, le maître peut esperer que la preuve sera produite—il s'agisserait d'une variation de la preuve originale. Mais la décision de tracer une ligne, comme d'autres pratiques possibles qui comportent une action sur la figure, est étranger (voire illegitime) à cet relation d'inspection entre étudiant et figure. Nous pouvons alors nous poser la question suivante, "Quelle est la difference, du point de vue du maître, entre énoncer la tâche selon la Version 4 plus haut ou l'énoncer selon las Versions 1 ou 3 et tracer la parallèle seulement quand il devient evident que les élèves ne savent pas quoi faire?" La Version 4 de l'énoncé de la tâche permet que quelques actions postérieures que le maître peut avoir besoin d'executer pour aider à la production de la preuve soient de nature comparable à celles qu'il espere de l'élève, c'est à dire qu'elles soient des reactions legitimes du milieu de l'étudiant. Alors, la Version 4 de l'énoncé d'une certaine façon libére l'enseignante de la necessité de contrôler que ses actions rompent le contrat. En fait, apres que la classe ait produit une preuve acceptable, Andy identifie son comportement mathématique avec celui des éleves et se detache des décisions du manuel:

> Alors, il y avait un coup de genie là, et ce coup de genie était de mettre cette ligne BD là. Okay? Ça n'est pas quelque chose d'evident à faire. Okay? Je crois que c'est la raison par laquelle ils nous ont donnée la figure.

Et on peut reprendre la formulation de Yackel & Cobb pour dire qu'ici, il y a une norme sociomathématique de inspection de la figure qui régle que compte comme une explication ou une justification mathématiquement acceptable.

L'analyse que je viens d'esquisser essaie de reconstruir la rationalité des actions qui permettent au maître d'aider l'élève a produir une preuve. Les actions du maître ont moins de chances d'alterer (du point de vue du maitre) le sens de preuve du texte produit si elles s'assujettissent aux normes que règlent l'interaction sujet-milieu—c'est-à-dire aux normes sociomathématiques. Donc, les normes sociomathématiques sont des outils pour le maître de maintenir la fiction adidactique et en même temps quelque fois de la faire progresser vers le but envisagé. Parmi ces normes sociomathématiques, il me semble qu'on peut inclure celles qui determinent si un énoncé est formulable ou pertinent dans le texte d'une preuve, si une observation va de soi ou non, etc.

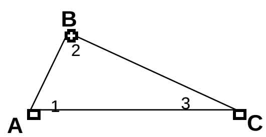
L'analyse en termes de normes sociodidactiques et sociomathématiques nous permet de revenir à l'episode observé et essayer de tracer la gestion du contrat local. On peut voir une pair d'ocassions dans lasquelles les actions du maître paraissent reduire la possibilité d'une situation adidactique; on peut aussi les expliquer comme une réponse à quelques contraintes sur le travail du maître. L'exercice proposé originalement aux élèves ("utilisez la figure à droite [Figure 4] pour donner une preuve du théorème sur la somme des angles d'un triangle") admet deux interpretations différentes, à savoir

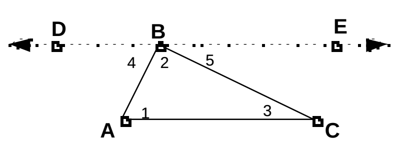
1. Utiliser les mêmes strategies que dans la preuve originale mais les appliquer à une ligne auxiliaire différente, et ainsi prouver encore le théorème.
2. Donner encore la preuve originale du théorème mais utiliser la figure donnée, ça voudrait dire qu'on commence par tracer une ligne auxiliaire au sommet A.

On pourrait dire que c'est le (petit) fait que les élèves peuvent encore choisir d'utiliser la ligne donnée pour produire la preuve ce qui permet au maître d'affirmer la correspondence entre le texte produit par l'élève (comme comportement observable) et la compréhension de l'élève que l'idée de la preuve est independent du sommet. Le fait que la ligne donnée est en realité une demi-droite et que des petits nombres distinguent les angles qui doivent être utilisés des autres angles sont des éléments qui font l'interpretation moins ambigu (donc, reduit le champ des décisions de l'élève). Andy fait plus encore pour reduire l'ambiguïté au début de l'episode quand elle dit:

> Nous avont dejà prouvé que la somme des angles … Oui, c'est precisement comme ça mais au lieu de tracer la ligne par B … nous l'avions tracée par A. Mais en realité c'est presque la même chose.

Ici on a une invitation officielle à lire la figure donnée comme la même figure anterieure (cf.



Figures *3*b and Figure 4) mais avec la ligne passant par B au lieu de passant par A. La figure 1b montre, néanmoins, que dans la premiere preuve la ligne était aussi en B. Le changement d'etiquette pour les sommets, sans changer la forme du triangle, circonscrit le changement entre la premiere et la seconde preuve à la correspondence entre représentation picturale et texte; mais dans le texte de la preuve, la ligne auxiliaire va être encore "la parallèle au coté AC par le sommet B." Le changement de la tâche limite donc le champ des voies acceptables pour adapter la premiere preuve à la seconde figure: Il fait ça en donnant explicitement le statut de ligne auxiliaire à la demi-droite tracée et en se souvenant de la premiere preuve de telle manière que le texte esperé de la seconde paraisse différent mais pas réellement différent dans les aspects qui permettent de commencer a prouver. La situatión de l'eleve n'est plus une de production d'une preuve mais une de edition du texte pour l'adapter a la nouvelle figure. En vue de que quelques etudiants ont effectivement commencés sa preuve en traçant une nouvelle droite parallele, l'analyse nous permet de comprendre que la suggerence d'Andy (de qu'il s'agit du meme probleme mais que la parallele est trace par B) est donné en response au besoin de reduire l'incertitude , même si elle reduit le champ d'operation des normes sociomathématiques.

## Conclusion

Les normes sociomathématiques et sociodidactiques définies de cette maniere sont des outils qui permettent d'expliquer les actions du maître dans la gestion de la production d'une preuve acceptable. Notre proposition s'addresse au problème de decrire et d'expliquer les régulations qui determinent ce qui compte comme preuve dans une classe ordinaire. A la difference de la notion originale des normes sociomathématiques, notre proposition prend au debut une certaine distance par rapport aux actions réelles ou aux motifs declarés du maître pour pouvoir avoir une base de décision sur la signification de ces actions du point de vue de la recherche d'un contrat de preuve.

Il est courante que les *mathematics educators* americains considerent leur activité academique comme developpant un champ *appliqué* (par opposition à *basique*), mais cela n'implique pas que les recherches répondent toujours à des problèmes mathématiques qui sont propres à la pratique d'enseigner les mathématiques. Frequemment c'est l'opposé ce qui est vrai.

Mon travail de thèse, dont j'ai présenté quelques details, s'integre à un groupe de travaux s'interessant au rôle du maître dans les pratiques mathématiques de la classe. Historiquement, la recherche a fourni à l'administration ou à l'ideologie des méthodes et des résultats, utiles pour contrôler la gestion administrative des maîtres. Aujourd'hui, se developpe un interet pour comprendre les conditions dans lesquelles la pratique d'enseignement est possible. Il devient necessaire de se demander quel type de travail est demandé de la part du maître et de reflechir sur les conditions de possibilité pour induir un tel changement du rôle du maitre au sein de la pratique. Quelques *educational researchers* ont noté que l'on sait suffisamment comment réver des réformes et constater qu'elles ne marchent pas, et suggèrent qu'il est bien temps d'etudier les choses qui effectivement fonctionnent pour commencer à comprendre comment on peut effectivement réformer l'école.