EL ORIGEN DE LA DEMOSTRACION: ENSAYO DE EPISTEMOLOGIA DIDACTICA

Gilbert Arsac
Recherches en didactique des mathematiques,
Vol 8, no 3, pp. 267-312, 1987.

Traducido por Martín Acosta

Resumen. La utilización de la demostración como medio de prueba es característico de las matemáticas con respecto a las otras ciencias. La demostración aparece además en Francia en los programas destinados a alumnos de trece años. Este artículo estudia la génesis histórica de la demostración, en Grecia, en el siglo V a. C., utilizando los trabajos históricos existentes, a partir de la siguiente problemática: ¿la aparición de la demostración está relacionada con un problema interno de las matemáticas o a la influencia de la sociedad griega? Desde el punto de vista del método, tratamos de mostrar al mismo tiempo que ciertos conceptos desarrollados para el análisis de las situaciones didácticas pueden servir de guía para examinar su génesis histórica. Debido a esta opción metodológica y de la selección de las preguntas abordadas, hablamos de epistemología didáctica. Los principales resultados son:
- El problema de la irracionalidad está en el origen de la transformación de las matemáticas en ciencia hipotético-deductiva;
- esta transformación, que implica el empleo de la demostración, así como la axiomatización, es decir el cambio de estatuto de los objetos de la matemática, desembocó en la superación de la contradicción debida al problema de la irracionalidad, pero la solución producida depende de la influencia de la sociedad griega.

Introducción

La demostración ocupa en matemáticas un lugar central pues es el método de prueba cuyo empleo sistemático caracteriza esta disciplina entre las otras ciencias. Se comprende entonces que tenga un papel importante en el currículo escolar (donde en Francia aparece desde los 13 años). Constituye entonces un objeto de estudio a priori privilegiado para el didacta de las matemáticas, aún más si se tiene en cuenta que su introducción está llena de dificultades para muchos alumnos. Toda investigación sobre su enseñanza plantea el problema de su historia, al igual que para cualquier concepto matemático, aunque la demostración no sea propiamente un concepto, sino más bien una técnica. Este artículo se dedica al estudio del origen, de la génesis de la demostración, bajo un punto de vista que precisaremos más adelante. No abordaremos el problema de su evolución ulterior, es decir la historia del rigor en matemáticas. Sobre esta pregunta, hacemos referencia a Lakatos (1984) y su abundante bibliografía.

El problema de la génesis, de la aparición de una noción, puede aclarar el de su enseñanza, si se piensa utilizar las condiciones históricas de esta génesis como guía para crear en la clase las condiciones de una génesis artificial de esta misma noción en el alumno. Desafortunadamente, a pesar del lugar de la demostración en matemáticas, la literatura sobre ella es poco abundante con excepción de Szabo (1977), a quien nos referiremos con frecuencia. Seguramente esta situación tiene dos razones de naturaleza diferente. Por una parte, parece que para los matemáticos, la demostración está orgánicamente relacionada con las matemáticas y aparece de manera natural en el curso de su desarrollo, sin que esta aparición plantee problemas a priori; así por lo menos podemos interpretar el silencio de los matemáticos a su respecto. Por otra parte, el estudio histórico del tema es difícil, como lo explicamos a continuación.

En efecto, si bien existe un acuerdo sobre el lugar y la época de la aparición de la demostración en Grecia, en el siglo V antes de Cristo, no hay unanimidad sobre los detalles de la historia. Los documentos de esa época son prácticamente inexistentes, y la historia de las matemáticas de este período es conocida sobretodo por comentadores griegos tardíos y los raros extractos de textos originales que ellos citan, y por los textos contemporáneos o apenas posteriores de Platón, textos que hablan de matemáticas pero que no son textos matemáticos. Así, la historia aporta difícilmente una respuesta a la pregunta de cómo apareció la demostración, y todavía más difícilmente a la pregunta del por qué. Sin embrago, la importancia del problema obliga a pensar en él, a establecer un diálogo entre el historiador y el didacta, en el cual este último no sea solamente un cliente. Esperamos en efecto mostrar a continuación que ciertas herramientas desarrolladas para el análisis didáctico pueden aportar un punto de vista nuevo a los problemas históricos, precisar las preguntas, e incluso sugerir algunas respuestas.

Aquí hay un primer ejemplo: en la lengua francesa corriente, e incluso en matemáticas, las palabras prueba y demostración son consideradas como sinónimos. El estudio de los debates de validación entre alumnos que trabajan en un mismo problema llevó a Nicolas Balacheff (1987), basado en el estudio de los contra ejemplos, errores y refutaciones en el desarrollo histórico de las matemáticas debido a Lakatos(1984), a distinguir cuidadosamente las palabras validación, prueba y demostración, atribuyéndoles sentidos precisos que designan tipos de argumentación diferentes empleados por un locutor para convencer un interlocutor de la veracidad de una afirmación. Esta distinción es indispensable si se trata de responder a la pregunta: ¿cuando aparece la demostración en matemáticas? si no, esta pregunta no problematizada es demasiado general y el historiador cree demasiado fácilmente ver aparecer demostraciones en las matemáticas prehelenicas. Se encuentran ejemplos a propósito de la matemática hindú en Van Der Waerden (1983, p.23), o egipcia en Keller (1986, p 46).

Veremos, en el numeral I, cómo el análisis citado de Nicolas Balacheff permite atribuir realmente a los griegos la invención de la demostración, sin negar a sus predecesores toda forma de prueba en el sentido que precisaremos. De manera paradójica, podremos decir incluso que el siglo V antes de Cristo marca en los Griegos, en geometría, el paso de la prueba a la demostración. Esbozaremos en el numeral III lo que serían los antecedentes (prolegomenos) de la demostración.

En la situación precedente, el análisis didáctico nos permitió entonces precisar las preguntas que debemos hacer a la historia. Tomemos ahora un segundo ejemplo donde el análisis didáctico permite proponer un criterio de selección entre diferentes respuestas posibles. A. Szabo (1977) atribuye la aparición de la demostración en matemáticas esencialmente a la influencia externa de la sociedad griega. Esta tesis es además relativamente tradicional: la transformación de la matemática en ciencia hipotético-deductiva sería la "aplicación" de las reglas del debate argumentado que gobernaban la vida política en la ciudad griega. citemos aquí a J. P. Vernant (1979, p. 97):
"*Seguramente no fue por azar que la razón surgió en Grecia como una consecuencia de esta forma tan original de instituciones políticas que llamamos la ciudad. Con la ciudad, y por primera vez en la historia del hombre, el grupo humano considera que sus asuntos comunes no pueden decidirse sin un debate público y contradictorio, abierto a todos y donde los discursos argumentados se oponen unos a otros. Si el pensamiento racional apareció en las ciudades griegas de Asia menor como Mileto, es porque las reglas de juego políticas en el marco de la ciudad-debate publico, argumentado, libremente contradictorio- se habían convertido en las reglas del juego intelectual".*

A. Szabo precisa esta idea atribuyendo a la escuela eleata de Parménides y Zenón el origen de la transformación radical de las matemáticas que precisó simultáneamente los objetos de esta ciencia definiéndolos axiomáticamente como idealidades, objetos del pensamiento, y las reglas de su manipulación, en particular la demostración que permite distinguir los enunciados verdaderos. Se trata, diríamos, de una tesis esencialmente externalista sobre el origen de la demostración en el sentido que busca este origen no en las necesidades internas del desarrollo de las matemáticas, sino en las influencias externas.

Esta explicación es contradictoria con el "principio de economía ecológica" (Bourdieu, 1980, p.144), "que determina que no se movilice más lógica que la que es necesaria para las necesidades de la práctica", principio a menudo invocado en didáctica donde se admite que, si la génesis de un concepto en un alumno no puede ser totalmente idéntica a su génesis histórica, por lo menos debe existir un punto común entre las dos situaciones: el concepto sólo aparece históricamente, sólo es asimilable por el alumno, si aparece como indispensable para la solución de un problema.

Podemos plantearnos esta pregunta a propósito de la demostración: ¿qué tipo de problema pudo hacer indispensable su introducción en matemáticas? Los historiadores nos dicen que la aparición de la demostración es contemporánea de la solución del problema de la irracionalidad, y precisamente, veremos en el numeral II que la demostración es una herramienta indispensable para dar ese paso de la manera como lo hicieron los matemáticos griegos.
Ver el problema de la irracionalidad como origen exclusivo de la aparición de la demostración, sería, por oposición a Szabo, un punto de vista exclusivamente "internalista". Veremos en el numeral IV que en efecto, una síntesis entre el punto de vista internalista y el punto de vista externalista es más verosímil. Digamos ahora algo a propósito: si el descubrimiento del problema de la irracionalidad provoca una contradicción en el seno de las matemáticas griegas, más o menos claramente percibido, la opción internalista supondría que esta contradicción lleve en si el germen de su superación por una solución única. Aquí tomaremos la posición de Balacheff y Lakatos estimando por el contrario que la contradicción no lleva en si misma su superación y nos uniremos a Szabo, pensando que la opción

de la solución que fue dada depende de las corrientes de pensamiento de la sociedad griega. Volvemos así a un punto de vista en parte externalista.

Señalemos, para terminar esta introducción, que empleamos en el curso de este trabajo otros enfoques análogos a los de la didáctica: análisis a priori, para problematizar las preguntas, noción de cambio de marco.

I. Pruebas y demostración

Como lo señalamos en la introducción, estas palabras se utilizan normalmente como sinónimos, en particular en matemáticas. Pero toda reflexión sobre el nacimiento de la demostración es al mismo tiempo una reflexión sobre su evolución, en un momento dado de la historia, del rigor en las matemáticas, y para aclarar esta evolución, nos parece indispensable retomar aquí las distinciones hechas por Balacheff (1987) entre validación, prueba y demostración; aunque fueron introducidas en un marco didáctico, pueden aclarar el debate histórico y epistemológico.

Aunque el conjunto del artículo citado anteriormente es una referencia útil para la lectura de lo que sigue, para comodidad del lector presentamos un resumen de los puntos en los cuales nos basamos, comenzando por una cita textual de las definiciones que nos interesan:

Llamamos explicación a un discurso que trata de hacer inteligible el carácter de verdad, adquirido por el locutor, de una proposición o de un resultado. Las razones expuestas pueden ser discutidas, refutadas, o aceptadas.

Llamamos prueba una explicación aceptada por una comunidad dada en un momento dado. Esta decisión puede ser objeto de un debate cuya significación es la exigencia de determinar un sistema de validación común a los interlocutores.

En el seno de la comunidad matemática sólo pueden aceptarse como pruebas las explicaciones que toman una forma particular. Son una secuencia de enunciados organizada según reglas determinadas: un enunciado se reconoce como verdadero, o bien es deducido a partir de los que lo preceden con ayuda de una regla de deducción tomada en un conjunto de reglas bien definido. Llamamos demostraciones a estas pruebas.

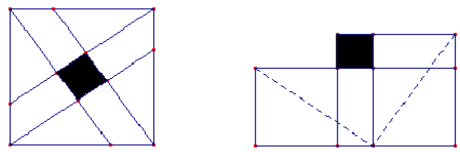
Reservamos la palabra razonamiento para designar la actividad intelectual, en su mayoría no explícita, de manipulación de informaciones para, a partir de datos, producir nuevas informaciones.

Estas distinciones de vocabulario ponen en relieve las dimensiones sociales de la demostración como resultado de un proceso particular de prueba.

Como lo subraya el autor de estas líneas, los procesos de prueba utilizados para validar una afirmación dependen a la vez del sujeto que los construye y de la situación en la que se encuentra, en particular del destinatario. Esto resalta el carácter social de los diferentes tipos de prueba. El problema que nos interesa a nosotros es la aparición de la demostración es decir un momento privilegiado de la evolución de los tipos de prueba en matemáticas.

Recordemos que desde el punto de vista histórico, es innegable que fue Grecia el lugar de aparición de la matemática como ciencia hipotético deductiva: el monumento, cien veces visitado, son los elementos de Euclides (comienzos del siglo tercero antes de Cristo), pero ya se encontraban demostraciones en buena forma según Autolycos (1979) alrededor de medio siglo antes y el testimonio de Platón permite remontar al siglo quinto antes de Cristo la transformación de la matemática que se manifiesta por la aparición de la demostración, sin reducirse a ella. En efecto, lo que aparece en los griegos es simultáneamente:

- la definición de los objetos matemáticos con ayuda de axiomas, de definiciones, como objetos ideales, independientes de la experiencia sensible;
-los enunciados generales (teoremas, proposiciones,...)que explicitan como hipótesis precisas las afirmaciones verdaderas para los seres matemáticos;
- las demostraciones que prueban las afirmaciones precedentes basándose únicamente en los axiomas, las definiciones y las reglas de la lógica, en particular el tercero excluido.



Se objetará que los elementos de Euclides no satisfacen completamente estos tres principios, que contienen axiomas implícitos, o casos de referencia a la figura. Pero en cuanto a lo que nos interesa, lo esencial es el "programa" que se fija Euclides y que nos parece ser el expuesto. Que ese programa no sea alcanzado completamente en los elementos, es una observación ya clásica, pero que no nos interesa, pues nos basta que este programa haya sido planteado, de lo cual dan testimonio a la vez la redacción de los elementos y la imagen dada por Platón, desde el punto de vista filosófico, de lo que caracteriza la actividad matemática; no discutiremos aquí la pertinencia de las definiciones de punto o de recta, o del uso de la igualdad en Euclides...[1]

Conforme a las precisiones de vocabulario introducidas más arriba, cuando decimos que los griegos son los introductores de la demostración en matemáticas, no negamos la existencia en las matemáticas anteriores o que siguieron una evolución independiente, de pruebas de diferentes niveles. Aquí presentamos algunos ejemplos:
* En Egipto, la precisión de los cálculos efectuados por los escribas se probaba verificando el resultado (Keller, 1986): es un método particularmente adaptado a los problemas de tipo de solución de ecuaciones, sobretodo cuando las incógnitas son enteras o racionales simples, y a las situaciones sociales objeto de esos problemas (venta, remuneración, reparto).

*En la India, las aserciones geométricas se prueban haciendo referencia a la figura: la exactitud del dibujo es un argumento, que puede asimilarse a una verificación; aquí presentamos un ejemplo clásico y particularmente llamativo: la figura siguiente, acompañada de un único comentario "contemplad", justifica para Bhascara (siglo 12 después de Cristo) el teorema de Pitágoras (m. F. coste-Roy, 1980).
Figura 1

Demorémonos en este ejemplo; en efecto, nos interesa la evolución del rigor sobretodo en el campo de la geometría. Todo el problema consiste en comprender como puede verse uno forzado a pasar de pruebas basadas en la evidencia de la figura a demostraciones donde la figura es sólo un soporte, que es el problema de la enseñanza de la geometría. antes de ver en el numeral II como los problemas de la irracionalidad pueden ser motores de los cambios, indiquemos brevemente, para no tener que volver sobre ello, cómo se relacionan los tres aspectos de la revolución griega: idealidad de los objetos matemáticos, método demostrativo, enunciados generales.

De hecho, a partir del momento en que por ciertas razones, estudiadas en el siguiente numeral, se renuncia a la experiencia física, a los datos de los sentidos, para definir los objetos de la matemática y validar las afirmaciones sobre ellos, sólo puede definírselos de manera axiomática, es decir precisando las reglas de manipulación a las cuales se someten (por le momento pasamos por alto el hecho de que para los griegos, contrariamente a los modernos, los objetos de la matemática así definidos tienen una existencia objetiva). El único método de validación disponible es entonces el que consiste en basarse en esas reglas y operar por deducción, es decir la demostración. Es evidente que solucionamos en una frase un problema que supone un enorme debate: ¿de donde vienen las reglas de la deducción que permiten manipular los objetos de pensamiento, cómo ponerse de acuerdo sobre ellas? la lectura de Platón permite convencerse que este era un problema claramente percibido por los griegos; desafortunadamente, esta lectura no basta para determinar la parte de las necesidades matemáticas y la de las necesidades del debate filosófico o político en la génesis de esas reglas de deducción (cf IV). En cuanto a los enunciados generales, su aparición proviene de la necesidad, en un marco abstracto, de explicitar completamente las hipótesis, mientras que en un marco que hace referencia a la experiencia, muchos datos pueden quedar implícitos, y el lenguaje matemático se confunde con el "lenguaje de la familiaridad" de Bourdieu (1980, ch 5. p 153). También puede releerse a Balacheff (1987) desde esta perspectiva, en particular el diálogo entre Darboux y Houel a propósito de la teoría de las funciones, donde el problema del carácter implícito de ciertas hipótesis se expone claramente. A esta razón "interna" se añade el hecho de que el empleo del lenguaje de la familiaridad supone la referencia a un implícito compartido por un comunidad suficientemente restringida; en el caso de las matemáticas predemostrativas podría tratarse de una comunidad de sacerdotes, de escribas, o de iniciados (caso de los pitagóricos), en cuyo caso lo

[1]Sobre la naturaleza de los elementos de Euclides, y su carácter de rigor, puede consultarse el texto de Proclus, traducido en Kayas (1978), que presenta la opinión de un platónico.

implícito podría responder a una voluntad explicita de secreto, fenómeno bien conocido en el caso pitagórico. El carácter público de un saber "laicizado" impone su explicitación total: en cierto modo, la lectura de Euclides, como la de Bourbaki, "no necesita conocimientos especiales". Al contrario, el dominio de validez de los resultados babilónicos no se precisa (Kline, 1972) y no es posible encontrar en los matemáticos indios una distinción sistemática entre resultados exactos y resultados aproximados (Boyer, 1968).

Vemos así que la aparición de la demostración está relacionada con una concepción global nueva de la matemática. Anteriormente subrayamos las diferencias de naturaleza entre pruebas predemostrativas y demostraciones, otra diferencia a la luz de lo que acabamos de exponer, es previsible e históricamente comprobada, relativa al lugar ocupado en el texto matemático respectivamente por las pruebas y las demostraciones: en la medida en que el método demostrativo es reconocido como el único medio de validación, todas las aserciones deben demostrarse, y hay demostraciones por todas partes; en la medida en que la referencia a la figura, a la evidencia del contexto sensible, o incluso a la jerarquía social, son medios de validación implícitos socialmente reconocidos, la aparición de pruebas, como la citada más arriba en el caso de las matemáticas indias, no se hace de manera sistemática. Las pruebas aisladas que aparecen así no constituyen, por otra parte, si el análisis anterior es exacto, las premisas de una demostración, en el sentido en que su multiplicación progresiva permitiría, por una evolución continua, llegar al estadio de las matemáticas demostrativas. Es lo que parece mostrar la historia de las matemáticas chinas, donde las pruebas aparecen en ciertos períodos en algunos autores, pero sin que esta práctica se generalice, ni que se identifiquen reglas lógicas constantes (J.C: Martzloff, 1988).

II. Análisis a priori de las relaciones entre la irracionalidad y la demostración

En el campo de la didáctica, el análisis a priori comprende el estudio de los diferentes comportamientos que pueden esperarse de alumnos colocados en una situación de enseñanza, para dar sentido a los comportamientos efectivamente observados en la experimentación. Los datos sobre los cuales se basa tal análisis se obtienen por una parte del contenido matemático de la situación, por otra parte del conocimiento que el investigador tiene de los alumnos a quien se dirige: los comportamientos esperados no serán los mismos según si uno se dirige a alumnos menor o mayor, que sigue estudios clásicos o técnicos. En otras palabras, el análisis a priori toma en cuenta la experiencia anterior del investigador, su conocimiento del medio, y en este sentido es en parte a posteriori; su carácter " a priori" indica una de las posiciones que el investigador tomará con relación al objeto de su investigación más que una situación temporal de anterioridad absoluta con relación a toda experimentación o pre-experimentación; podríamos también hablar de análisis distanciado con relación a los hechos experimentales.

Tratando ahora de aplicar el mismo método al estudio de las reacciones griegas frente a los problemas de la irracionalidad y de la inconmensurabilidad, encontramos el mismo fenómeno; más allá de las deducciones fácilmente hechas de un análisis técnico, puramente matemático y epistemológico, de los problemas, deberemos, para poder progresar, tomar en cuenta el conocimiento histórico que tenemos de la matemática griega: no puede haber anterioridad total del análisis con relación a toda investigación histórica, sino que trataremos de examinar cuales pueden ser los resultados de una distanciación sistemática con relación a los hechos históricos.

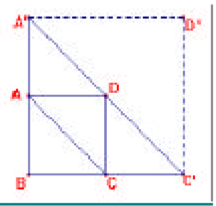
2.1. *Análisis técnico de las relaciones entre irracionalidad y demostración*

Veamos ahora el problema que nos preocupa, tomándolo primero que todo en su forma más popularizada; el de la "irracionalidad de /2" o incluso, y es necesario hacer una distinción fundamental, el de la inconmesurabilidad de la diagonal del cuadrado con su lado. Muy a menudo, estos dos problemas están confundidos, mezclados; es el caso cuando, por ejemplo, se los resume por el hecho que la diagonal del cuadrado de lado unidad es irracional. Pero en realidad hay dos problemas, en dos marcos diferentes:
- En el marco de la aritmética, se constata que el número 2 no admite raíz cuadrada racional;
- en el marco de la geometria, se constata que la diagonal del cuadrado no admite parte alícuota común con el lado.

Por supuesto, hay una relación entre los dos problemas, cada uno permite comprender mejor al otro, y la existencia de esta relación, que puede percibirse únicamente después de haber señalado la diferencia, es tan importante que le consagramos un estudio especial utilizando el concepto de "juego de marcos" introducido en didáctica de las matemáticas por R. Douady (1984) (cf. enseguida II, 2.2).

Contentémonos, en una primera etapa, de algunas observaciones inmediatas: el problema aritmético es mucho más simple en su enunciado que el problema geométrico, ya que expresa una propiedad del número 2. Por el contrario, el problema geométrico no expresa una propiedad intrínseca de la diagonal del cuadrado, que puede evidentemente entrar en una relación racional con otros segmentos diferentes al lado del cuadrado; concierne únicamente la pareja de segmentos diagonal lado. Por ejemplo, la siguiente figura simple muestra evidentemente segmentos en relación 2; en particular A'C'/AC pero A'C'/AB y AC/AB no existen en el campo racional. Notemos que el estatuto de nuestras afirmaciones ("evidentemente", "no existen") deberá precisarse con relación al conocimiento matemático griego: esto resultará del estudio hecho en 2.2.
Figura 2

Vamos un poco más lejos en la reflexión en el marco de la geometria: en la historia como en la enseñanza, lo vimos en el numeral I, el problema es el paso de un estadio en el que la figura sirve de herramienta de prueba a aquel en el que la geometría se convierte en el arte de "razonamientos exactos sobre figuras inexactas". Ahora bien, precisamente es absolutamente imposible constatar la inconmensurabilidad sobre una figura; por el contrario, la experiencia inmediata concluye la conmensurabilidad: siempre se puede medir con un mismo instrumento el lado y la diagonal del cuadrado (esta constatación ya la había hecho Aristóteles (traducción Tricot 1964, 983a, 15, p 20). Así, la inconmensurabilidad sólo concierne a entidades matemáticas ideales, y no puede ser objeto de una demostración, en el sentido preciso que le dimos a ese término en II.



En el marco de la aritmética la situación, aunque más simple, tiene el interés de imponer una prueba por el absurdo: en análisis a priori precedente no permite aquí prever qué grado de abstracción, de axiomatización del concepto de número es necesario, por eso empleo la palabra "prueba", pero el problema es un problema de existencia, y sólo puede tener una respuesta negativa utilizando un razonamiento por el absurdo. Tal conclusión no podría darse en el marco de la geometria porque, como lo veremos más adelante (III), primero hay que comprender la naturaleza del problema y construir el concepto de inconmensurabilidad. Según la naturaleza de ese concepto, el paso por el absurdo podrá ser obligatorio o no.

En este estadio del análisis, podemos entonces ya obtener algunas conclusiones:
-El reconocimiento del fenómeno de la inconmensurabilidad en el marco de la geometria implica la existencia de demostraciones: si el teorema de Pitágoras, por ejemplo, puede mostrase (numeral I), la inconmensurabilidad sólo puede ser demostrada.
- Las pruebas de irracionalidad en el marco de la aritmetica implican el uso de l razonamiento por el absurdo.

Notemos que hasta el momento, sólo hemos utilizado unos pocos datos históricos, por lo cual no podemos dar respuesta a las siguientes preguntas que surgen naturalmente después de las conclusiones anteriores:
*¿Cómo, en el marco de la geometria, los matemáticos griegos pudieron descubrir el problema de la inconmensurabilidad? ¿Cómo pudo ser visto por ellos?
* ¿El razonamiento por el absurdo, del cual vimos la necesidad al menos en el marco de la aritmetica, estaba disponible en el siglo V a.C., como método de validación de una aserción, fuera del campo de las matemáticas, y podía así aplicarse sin problema en matemáticas? o por el contrario, ¿el razonamiento por el absurdo apareció de manera natural en las matemáticas?

Vamos a consagrar el resto de este numeral a la respuesta a la primera pregunta respecto a la geometría. La segunda pregunta la abordaremos en el numeral IV dentro del estudio de la interacción entre el pensamiento griego en general y las matemáticas.

2.2. *Análisis a priori en función del marco histórico*

Para ir más lejos, tenemos que utilizar los datos históricos describiendo el estado de las matemáticas griegas antes del descubrimiento de la irracionalidad.

Pero primero es necesario hacer dos observaciones:
- el conocimiento histórico que tenemos de las ideas de ese período no es suficiente:
- el tiempo de la historia no es el tiempo didáctico, no hay aquí autoridad superior para apresurar el paso de la comunidad matemática, imponer su ritmo como lo hace el profesor en su clase. Nadie sabe por adelantado cual será el resultado de la investigación, ni se puede garantizar que tenga resultado, y la escala es incomparable: el tratamiento del problema de la irracionalidad y de la inconmensurabilidad en las matemáticas griegas se extiende seguramente a todo el siglo quinto antes de Cristo. Por eso sólo podemos hablar de ruptura a partir de una perspectiva a posteriori, que comprime la duración histórica.

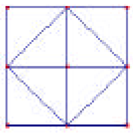
Volvamos ahora a nuestro tema. Históricamente, la matemática griega predemostrativa (es decir alrededor del comienzo del S V a C) parece poder resumirse a la matemática pitagórica. Describir el estado de la matemática equivale en este caso a describir el pensamiento pitagórico sobre esta ciencia. Pero esta pregunta debe problematizarse: su simple enunciado comporta un anacronismo, porque sobreentiende que la matemática existe ya como disciplina individualizada en el campo del conocimiento. Esta última idea es muy tentadora para un espíritu moderno pues conocemos la importancia del número entero en el pensamiento pitagórico. De ahí a identificar como un pensamiento para quien todo es matemático, sólo hay un paso, pero presentimos que si todo es matemático, es porque el campo de las matemáticas no está delimitado, y que el empleo inevitable de la palabra "matemática" conlleva una ambigüedad fundamental: de hecho hay un pensamiento pitagórico (cf p. 12), pero este no separa metodológicamente los distintos campos que son para nosotros la filosofía, las matemáticas y la física.

Entremos ahora en detalles:

2.2.1. *El pensamiento pitagórico*
A pesar de las precauciones preliminares, todavía nos esperan dificultades enormes:
*Primero que todo, no poseemos prácticamente documentos sobre el pitagorismo primitivo: sólo lo conocemos por lo que dice Aristóteles, o por reconstrucción a partir de lo que dicen sus adversarios, comenzando por Zenón de Elea del que hablaremos después. (No hay que confundir esta doctrina primitiva con el pitagorismo tardío, también llamado platonismo, más conocido).
* En segundo lugar, el carácter mismo de la doctrina la hace difícil de conocer: No debemos imaginarla como un pensamiento racional fundada sobre principios claros, no contradictorios. Citemos aquí Vernant (1982, p 111) quien después de destacar el papel desempeñado en los orígenes griegos por personajes del tipo "shamanes" o "yoguis" agrega "*...lo que podría llamarse shamanismo griego... aparece más netamente en el pitagorismo antiguo"*. Así, la comprensión de la forma del pensamiento pitagórico arcaico está en el campo de la etnología, de la historia de las psicologías, de la filosofía y de las matemáticas. Para Aristóteles ya se trataba de un pensamiento difícil de comprender, casi exótico, el lazo estaba roto.

Dicho esto, lo más simple es sin duda indicar aquí algunas características de este pensamiento, suficientes para comprender lo que sigue, pero que serían insuficientes para una comprensión global del pitagorismo antiguo. En efecto, evitamos todo lo que parece ser un contenido filosófico del pitagorismo, que sin embargo juega un papel importante en el debate con Zenón sobre el cual hablaremos más tarde, y nos limitamos a los aspectos que conciernen directamente las matemáticas.

Primera característica (C1). Todo es número (entero)
Segunda característica (C2). La doctrina no hace diferencia entre el marco de la geometria y el marco de la física: es un sincretismo físico-matemático, aumentado por el hecho de la ausencia de distinción entre lo real y lo percibido.



En el marco de la geometría, tales concepciones llevaban a considerar un segmento como constituido de puntos en una sucesión, como perlas en un ábaco, utilizando el modelo de los números enteros. Por razones esencialmente filosóficas, es probable que esos puntos fueran considerados como "separados" entre ellos por una sustancia intersticial. Es poco probable que C1 haya conducido a asociar a cada segmento un número entero, por el contrario decir que todo es número, o más precisamente "logos" (es decir portador de sentido) conduce sin duda a atribuir a toda *pareja* de segmentos una razón de enteros, de acuerdo con los conocimientos pitagóricos en música.

Simultáneamente a esta concepción, la geometría llevaba a admitir la divisibilidad infinita del segmento, o más precisamente, la dicotomía infinita, pues sin duda se sabía en esa época que el punto medio de un segmento puede construirse con regla y compás.

Naturalmente, sabemos ahora que esas dos concepciones son contradictorias, pero su simultaneidad era posible en los pitagóricos por la ambigüedad de la noción de punto, a la vez constituyente último de la materia (como el átomo para los atomistas) y punto geométrico (confusión típica de C2). Subrayemos de paso el anacronismo que consiste en presentar a los pitagóricos primitivos como "atomistas", anacronismo relacionado con la afirmación implícita de una autonomía de la física en el pensamiento pitagórico (sobre las relaciones entre el atomismo de Demócrito y las concepciones pitagóricas, cf, Tannery, 1887).

Por supuesto, esos principios estaban relacionados con la experiencia concreta de los pitagóricos, pues presentaban sus descubrimientos en el campo musical como una práctica físico-matemática: siempre que se trata de magnitudes concretas, es posible encontrar entre dos de ellas, por medición, una razón racional. La búsqueda de esas razones es uno de los objetos de todas las matemáticas antiguas (egipcia, babilónica)y el hecho de que algunas razones, como el de la longitud de la circunferencia y su diámetro, fueran más difíciles de encontrar que otras, no puede conducir a suponer que no existen (cf IV). Además, la idea de que dos magnitudes, y más precisamente dos longitudes, tienen siempre una parte alícuota común es una etapa inevitable en el desarrollo del pensamiento matemático tanto en el plano histórico como en el plan individual. El descubrimiento de la irracionalidad se basa de hecho "en contra", en el sentido de Bachelard (1983, cap 1, I p14), de esta teoría preliminar y el hecho de que este obstáculo haya sido superado precisamente a partir del pensamiento pitagórico no es debido al azar (cf IV 4.4)

Podemos precisar ahora la situación de la matemática en ese pensamiento: la aritmética, en un sentido muy primitivo de clasificación de números enteros, ocupa un lugar privilegiado desde el que domina lo que podríamos llamar una físico-geometría que comprende la música como dominio particularmente estudiado.

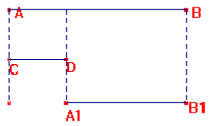
Este pensamiento se enfrentará más o menos simultáneamente a un doble desafío, matemático con la inconmensurabilidad, filosófico con el pensamiento eleata. La relación entre esos dos desafíos, que abordaremos en IV, es uno de los problemas más fascinantes, pero a la vez más difíciles, que plantea el origen de la demostración.

2.2.2 *Contextos posibles de aparición del problema*

Podemos ahora retomar el análisis a priori, teniendo en cuenta lo que dijimos sobre pensamiento pitagórico, examinando los contextos posibles de aparición de los problemas de irracionalidad y de inconmensurabilidad. Aquí nos basamos ampliamente en M. Caveing (1977) de quien tomamos la siguiente lista:

* el estudio de la música: podía llevar al problema de la división de la octava en dos, es decir encontrar un número cuyo cuadrado sea dos.
* el problema de la diagonal del cuadrado (cf el comienzo de este numeral), que debemos, analizar más en detalle. Si bien el cuadrado es uno de los polígonos regulares más simples, lo cual justifica su estudio, el interés específico en su diagonal aparece entre otros en el problema de la duplicación del cuadrado resuelto gráficamente en el diálogo de Platón "el Menón" (cf. Platon tr Chambry, 1967) por la figura 3 que muestra que es el cuadrado que tiene como lado la longitud de la diagonal de un cuadrado dado el que tiene un área doble de la de éste.

figura 3



Pero el problema de la duplicación del cuadrado no es únicamente anecdótico: es análogo más simple del problema de la duplicación del cubo, uno de los "problemas clásicos" de la geometría griega a los cuales A Seidelberg (1978) atribuye un origen religioso junto con la cuadratura del círculo.
*el problema de la diagonal del pentágono. Aquí también, el solo hecho de que el pentágono sea uno de los polígonos regulares más "simples" después del cuadrado y antes del hexágono, el cual no plantea problemas, solo es un primer argumento. Mucho más convincente es el hecho de que el pentagrama (pentágono estrellado) era el emblema de los pitagóricos, y se encontraba en un lugar privilegiado y en su caso, la aparición de un fenómeno de inconmensurabilidad podía incluso aparecer naturalmente a través de un método sin duda corriente en los griegos, el procedimiento de antiferesis. Tenemos que explicar este procedimiento, que permite hacer aparecer el fenómeno de inconmensurabilidad en el marco de la geometria, sin relación con el campo numérico, lo que de alguna manera constituye su fortaleza y su debilidad. El estudio histórico (cf Von Fritz, 1945 ; Caveing, 1982) lleva a pensar que es a través del método de la antiferesis que el problema de la inconmensurabilidad se presentó a los matemáticos griegos; en efecto, sabemos por Aristóteles que la antiferesis, que el llama antaneresis, intervenía en una definición "pre-euclidiana" de la igualdad de razones, definición que da cuenta de un estadio del pensamiento donde la dificultad de la inconmensurabilidad se había reconocido, pero no se había resulto completamente (cf III)

La antiferesis es un método de buscar, de construir, la parte alicuota común más grande posible entre dos magnitudes (su MCD en el caso de dos enteros)que podríamos llamar "método de las sustracciones sucesivas", por analogía con el "método de las divisiones sucesivas", es decir el algoritmo de Euclides, que es su perfeccionamiento para los enteros. En el caso que nos interesa, sean dos segmentos AB>CD.

El método consiste en sustraer CD de AB, lo que da A1B1, luego, si CD<A1B1, sustraer de nuevo CD de A1B1, lo que da A2B2.... etc. Cuando se llega a un segmento AkBk<CD, se cambia de rol. Entonces:
-si los dos segmentos iniciales son conmensurables, se llega en un número finito de etapas a un segmento nulo. Los dos segmentos iguales de la etapa precedente son la parte alicuota común buscada.
- si no, el proceso sigue infinitamente, y la longitud de los segmentos sucesivos tiende a cero[2].

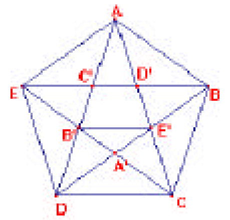
El procedimiento de la antiferesis está expuesto en los Elementos de Euclides para los números y para las magnitudes en general, pero tal como lo señalamos, es anterior. Se lo encuentra para los números en China (cf. Van Der Waerden, 1983).

Este procedimiento permite entonces asignar a una pareja de magnitudes una sucesión de sustracciones que en términos modernos determina el desarrollo en fracción continua de la razón de las dos magnitudes consideradas. Bajo la hipótesis pitagórica de que dos magnitudes siempre tienen una razón racional, este procedimiento es un medio de determinar esa relación en número finito de operaciones e incluso si, por diversas razones (número de etapas), no puede ejecutarse totalmente el cálculo, puede ser un criterio de igualdad entre dos razones por la identidad de sus antiferesis (es decir las sucesiones de sustracciones que las caracterizan respectivamente).

Así, podemos entrever una respuesta posible al problema que nos planteamos: el matemático griego habría encontrado el problema de la inconmensurabilidad al encontrarse con una antiferesis infinita. Falta ver porqué y cómo puede producirse este encuentro en los casos que enumeramos. Debemos tener en cuenta para esto las herramientas matemáticas disponibles y el hecho de que, a priori, el matemático espera una antiferesis finita. El carácter infinito debe de alguna manera *imponerse por sí mismo.*

---

[2]Según Von Fritz (1945), la antiferesis era tambien un procedimiento practico de cálculo de la razón entre dos longitudes. Utilizado concretamente (por transferencia de longitudes) el procedimiento es evidentemente siempre finito.



2.2.3. Los casos del pentágono y del cuadrado

El historiador K. Von Fritz (1945) fue el primero en llamar la atención sobre el hecho que , en el cálculo del pentágono, el carácter indefinido de la antiferesis aparece en efecto relativamente de manera espontánea cuando se aplica al lado y la diagonal: con las notaciones de la figura 5, la antiferesis aplicada a la pareja (AD, AE) conduce a remplazarla por la pareja (B'E',B'A') pasando por un solo intermediario (B'E,EA') y los conocimientos matemáticos atribuidos a la época son suficientes para recorrer las dos etapas. Así se llega al mismo problema para el pentágono regular A'B'C'D'E', por lo que el proceso es indefinido, a menos que se suponga un mínimo absoluto entre las longitudes, lo cual se excluye por el conocimiento del medio.

FIGURA 5

Sin embargo el reconocimiento del carácter infinito del proceso supone que se admita que todos los pentágonos regulares tienen las mismas propiedades, es decir que se admitan las propiedades de las figuras semejantes, al menos en el caso de los polígonos regulares. Es lo que se hace en la enseñanza de la geometría cuado se habla de las propiedades de "la figura" admitiendo de manera implícita propiedades de las figuras semejantes, que son particularmente evidentes en el caso de los polígonos regulares.

Así la reflexión sobre el caso del pentágono lleva a considerar que los dos segmentos AD y AE no tienen medida común, pro medio de un procedimiento de pensamiento que muestra y utiliza más o menos al mismo tiempo el hecho de que la relación AD/AE es igual a A'D'/A'E' por lo tanto se reproduce indefinidamente con te´rminos cada vez más pequeños. Toda reflexión sobre las propiedades de la similitud que busque aumentar el rigor de la prueba de las propiedades utilizadas puede basarse únicamente en la hipótesis de la racionalidad universal de las razones entre segmentos y por lo tanto conducir a un círculo vicioso o a la tarea temeraria de definir una nueva noción de razones para los segmentos (cf III donde mostramos como el primer camino escogido para esta tarea era probablemente no totalmente riguroso).

En cuanto al cuadrado, el carácter infinito de la antiferesis aplicada a la diagonal y al lado es menos evidente, pero podría evidenciarse con los medios matemáticos de la época con los mismos problemas de razonamientos circulares (Caveing, 1982b, ch 2 & 5).

No obstante, hay buenas razones para pensar que el lugar del descubrimiento de la irracionalidad haya sido el cuadrado más que el pentágono: pero no poseemos ningún testimonio directo de un estudio primitivo del tipo conjeturado por un cierto número de razones históricas por Von Fritz. Nos esforzaremos ahora (2.2.4) en aportar otros argumentos en favor del cuadrado más relacionados con nuestra problemática pero antes preferimos sacar la siguiente conclusión: En el marco de una geometría que sin duda todavía utiliza ampliamente la referencia a la figura, el fenómeno de la irracionalidad puede ser descubierto empleando una técnica relativamente simple; se manifiesta entonces, no como un descubrimiento sorprendente, sino más bien como un nudo de contradicciones, ya que el procedimiento matemático lleva a "probar" la no existencia de ciertas relaciones entre segmentos, contrariamente a las ideas recibidas y a la doctrina pitagórica, y que este método de "prueba" se apoya a su vez en la hipótesis de la existencia universal de relaciones racionales que lleva a negar...[3]. Vemos aquí que el conjunto de esas

[3]Se encontrará en Knorr (1975), en el capítulo 2, una reconstitución posible de la forma primitiva de la demostración de la irracionalidad de /2, basada en el estudio de la figura 3 relativa a la duplicacion del cuadrado, y sin utilizar la antiferesis. Pero esta demostración supone que se haya conjeturado antes la irracionalidad de /2. La antiferesis tiene la ventaja de constituir una lógica de descubrimiento de una contradicción, de la que puede surgir luego la conjetura.

contradicciones constituye un enigma que no es fácil de solucionar. Además felizmente tenemos trazas de diversas tentativas de superar la contradicción, anteriores a la solución de Eudoxo expuesta por Euclides en el capítulo X de los elementos (Heath, 1956) y que, a pesar de la escasez de documentos históricos, dan testimonio del juego complejo de las conjeturas y de las refutaciones en la evolución de las matemáticas (cf III).

2.2.4. Los juegos de marco

Volvamos ahora, para terminar este numeral, a la comparación entre la situación del pentágono y la del cuadrado. Vamos a ver que aquí, a la luz del concepto de "juego de marco", la segunda es seguramente más favorable que la primera al progreso matemático, lo que parece además ser la opinión más común, fuera del artículo de Von Fritz.

En didáctica, se habla de juego de marcos para subrayar que la mayoría de los conceptos matemáticos pueden intervenir en diversos marcos, por ejemplo en el marco de la geometria y en el marco de la aritmetica, o algebraico, etc. (cf. R. Douady 1986). De allí resultan correspondencias entre objetos y relaciones en los diferentes marcos, por ejemplo entre el problema de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y el de la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado del cuadrado.

Para introducir y hacer funcionar nuevos conocimientos en el alumno, el didacta privilegia las situaciones en las que el cambio de marco da lugar a una correspondencia imperfecta creadora de desequilibrios que se trata de compensar (R Douady). Este es el caso del cuadrado y su diagonal: puede ser abordado en un marco exclusivamente geométrico, a partir de la antiferesis, pero le corresponde, por el teorema de Pitágoras, un problema exclusivamente aritmético, porque la relación de la diagonal y el lado debe tener como cuadrado 2.

En el marco de la aritmetica, la búsqueda de la raíz cuadrada de dos, que puede estar motivada por consideraciones relativas a la música (tercer marco), puede ser difícil, llevar a aproximaciones, sin sugerir la idea de que esta raíz cuadrada no existe. El marco de la geometria provee primero un objeto que tiene como medida raiz de dos pero luego, la aplicación de la antiferesis, que podría llevar al valor de la relación, lleva a dudar de su existencia, introduce un cruce de contradicciones. Un regreso al marco de la aritmetica puede llevar a a hipótesis de la no existencia de a raíz cuadrada, a la luz de la experiencia geométrica. Pero ya señalamos que en el marco de la aritmetica, la demostración de no existencia sólo necesita dos herramientas simples: el razonamiento por el absurdo y la clasificación de los números en pares e impares. Por lo menos una de ellas era familiar a los pitagóricos: la clasificación par-impar. En cuanto al razonamiento por el absurdo , lo veremos en el numeral IV. Suponiendo probada la irracionalidad en el marco de la aritmetica, sólo hay una explicación, o al menos un resultado que hace menos inverosímiles las dificultades encontradas con la diagonal y el cuadrado. Sin embargo, el marco de la geometria deja el problema abierto hasta la solución aportada por la teoría de las razones de Eudoxo expuesta en Euclides, capítulo X.

Hay que añadir a esto, subrayando la posibilidad y el interés del cambio de marco en el caso del cuadrado, los siguientes dos argumentos: Primero, veremos en III que los matemáticos griegos seguramente pensaron primero que si dos segmentos podían no ser conmensurables, los cuadrados construidos sobre esos segmentos podían serlo siempre, lo que n puede ser sugerido por el ejemplo del pentágono si por el del cuadrado; segundo, el problema de la diagonal del cuadrado está además relacionado con dos problemas clásicos: el de la duplicación del cuadrado, y el de las triplas pitagóricas. Ya hablamos de la duplicación del cuadrado; en cuanto al cálculo de las triplas pitagóricas, es decir triplas (a,b,c) de enteros lados de un triangulo rectángulo, sería, según Van Der Waerden (1983), uno de los problemas matemáticos más antiguos. La relación con el problema de la diagonal es menos evidente. Consiste en observar que entre las triplas pitagóricas calculadas con las fórmulas conocidas en la época (por ejemplo Platón, citado por Van Der Waerden p 8), ninguna corresponde a un triangulo rectángulo isósceles, es decir, a un semi cuadrado.

A la luz de todas estas posibilidades, el problema del pentágono aparece relativamente pobre. Por supuesto, la relación de la diagonal y el lado es el famoso número áureo, pero este no puede aparecer naturalmente en un marco de la aritmetica simple que pudiera permitir plantear y resolver fácilmente el problema de su existencia: el lector recordará que los matemáticos griegos no disponían de la notación algebraica, y de la posibilidad de razonar sobre la ecuación x2-x-1=0 que conduciría, en términos modernos, por simples consideraciones de paridad e imparidad, a la irracionalidad del número áureo.

En favor el problema del pentágono solo queda el hecho de que el pentagrama era el emblema de los pitagóricos y la simplicidad de la antiferesis. Sin embargo, la imposibilidad del cambio de marco simple que permite un descubrimiento de la inexistencia de la raíz cuadrada de 2 en el terreno estable de la aritmética, conduce a ver en el caso del pentagrama el lugar donde pudo manifestarse el tejido de contradicciones relativo a la irracionalidad más que aquél donde pudieron haberse superado (Caveing, 1977, p1269).

2.2.5. Conclusión sobre las relaciones entre la irracionalidad y la demostración

1. Los problemas relativos al pentágono y al cuadrado presentan situaciones donde la existencia de un fenómeno nuevo, que pone en duda las ideas recibidas en el pitagorismo, podía ser reconocida utilizando las herramientas de pensamiento disponibles, sin salir del pensamiento antiguo, paríamos decir en lenguaje didáctico.

2. La solución definitiva del problema como figura en Euclides exige la definición de los objetos de la geometría como objetos de pensamiento, idealidades, cuyas reglas de manipulación son precisadas po axio mas y cuyas propiedades sólo podrían establecerse por medio de demostraciones en el sentido del numeral 1.

3. Sin embargo, el primer paso a la solución del problema de la irracionalidad fue sin duda, en el marco de la aritmetica, la prueba de la no existencia de la raíz cuadrada de dos. Esta prueba que sólo utiliza el razonamiento por el absurdo y las propiedades de paridad e imparidad no necesita forzosamente un procedimiento tan claro de axiomatización y de demostración.

4. El problema de la relación entre la diagonal y el lado del cuadrado fue seguramente el lugar privilegiado de los descubrimientos sobre la irracionalidad y la inconmensurabilidad.

III. Prehistoria de la irracionalidad: de la percepción del problema a su solución

El problema que nos interesa es el de los orígenes de la demostración o más ampliamente, de la transformación global de las matemáticas en ciencia hipotético-deductiva. Hemos visto que los problemas de irracionalidad y de inconmensurabilidad juegan un papel importante porque constituyen una situación descriptible en terminos de matemáticas pitagóricas pero insoluble en ese marco.

Como ya lo dijimos, es muy inverosímil que solo la percepción del problema haya conducido inmediatamente a su solución. La elaboración de la solución definitiva debió ser precedida de muchos tanteos, hacia el siglo V a C. En la medida en que esos tanteos representan etapas en el camino del rigor, nos interesan también. El guía intelectual de nuestra investigación será aquí I. Lakatos (1984) porque el concepto de irracionalidad entra en la categoría de lo el llama "proof generated concept", concepto nacido de la prueba. En efecto, como ya vimos, no puede suponerse el problema de la inconmensurabilidad en el marco de la geometria sin haberlo ya encontrado, y de alguna manera probado; el concepto sólo pudo encontrar su lugar y la contradicción fue superada, únicamente después de toda la construcción de la teoría de las razones y de la matemática demostrativa, construcción provocada por el problema. Mientras tanto, conforme a la descripción del juego de las conjeturas y de las refutaciones, la matemática siguió evolucionando, sea dejando momentáneamente de lado ese caso embarazoso, sea rodeando el obstáculo, sea elaborando soluciones parciales, sea fracasando en el intento. Si aceptamos la datación de Knorr (1975), esta fase habría durado un siglo, de '430 (reconocimiento del fenómeno de inconmensurabilidad) hasta -330 (axiomatización de Eudoxo).

Naturalmente los griegos, que no tenían a Lakatos, no nos dejaron una descripción de esta fase, pero afortunadamente, diferentes indicios históricos que vamos a enumerar enseguida permiten hacerse una idea de algunas de esas etapas.

El primer indicio es un texto de Platón en "La República" (trad. Dies 1977 libro VIII, 546c). Este texto célebre, relativo al "número nupcial", nos interesa en la medida en que utiliza la longitud de la diagonal del cuadrado, en el siguiente pasaje: "*...cien cuadrados de diagonales racionales de cinco, cad a uno disminuido de uno, o cien cuadrados de diagonales irracionales, disminuidos de dos ...*" La interpretación del texto no produce divergencias entre los traductores: el cuadrado de lado 5 tiene una diagonal de longitud $\sqrt{50}$, irracional, cuyo valor aproximado a una unidad es 7 (pues 7*7=49) y la frase citada expresa que 100(7*7-1)=100(50-2).

Permitiéndonos ciertos anacronismos, podemos decir brevemente que la "diagonal irracional" designa $\sqrt{50}$, mientras la "diagonal racional" designa 7.

Pero lo que es interesante y escapa al lector de la traducción es la palabra griega utilizada por Platón y traducida por irracional; no es la palabra que empleará más tarde Euclides y que significa "inconmensurable en longitud". Platón emplea una palabra que significa etimológicamente "inenunciable". Así mismo la palabra traducida en este texto por racional significa "enunciable" (cf Szabo, 1977 o Caveing, 1977, p 1205, que traduce por expresable). Es muy tentador ver aquí la traza de un estadio de las matemáticas donde se había descubierto la imposibilidad de atribuir a la diagonal del cuadrado de lado 5 una medida racional pero sin haber todavía definido el concepto de inconmensurabilidad. Notemos además que el texto evita la dificultad razonando sobre el cuadrado de la diagonal que sí es racional. Lo que nos lleva al segundo indicio.

Este segundo indicio fue destacado por Caveing (1977, p 1270 y 1982 p 183). El anota que existen varias trazas de una época donde se trató de esquivar el escollo de la inconmensurabilidad en geometría razonando sobre las áreas de los cuadrados construidos sobre los segmentos: las obras de Hipócrates de Chio, autor de la celebre cuadratura de las lúnulas, de la cual poseemos un extracto, testimonia de esta época (caveing 1977 p 692). La posibilidad de esta etapa implica un estadio de rigor que no es todavía el de la demostración, porque tales matemáticas utilizan simultáneamente las propiedades de las magnitudes semejantes, y por lo tanto las razones entre longitudes, sin poder definirlas correctamente. Seguramente se trata de un periodo donde la dificultad de la inconmensurabilidad fue reconocida pero no elucidada. Una traza subsiste en Euclides (cap X, definiciones), cuando dado un segmento unidad, el divide, por una definición, los otros segmentos en segmentos racionales e irracionales, pero no de manera contemporánea, ya que pone en la misma clase no solamente los segmentos conmensurables con la unidad, sino también aquellos para los que el área del cuadrado construido sobre ellos es racional[4]. Esto apoya la existencia de la fase matemática que ilustraría Hipocrates de Guio, y sugiere también la idea de que la primera forma de superar el problema de la inconmensurabilidad pudo ser la hipótesis de que dos segmentos son siempre al menos conmensurables por intermedio de los cuadrados construidos sobre ellos, lo que salvaba en parte las ideas pitagóricas, y era naturalmente sugerido por el ejemplo del cuadrado y su diagonal.

Un tercer indicio lo reporta Aristóteles (Topicos, trad. Tricot 1950, 158 B 30, p.332) cuando cita como definición de la igualdad de dos razones la identidad de sus antiferesis. Naturalmente, este tercer indicio viene a apoyar un descubrimiento de la inconmensurabilidad geométrica por medio de la antiferesis y confirma el uso practico que se hacía de este procedimiento. Sin embargo, en ausencia de la definición eudoxiana de las razones entre magnitudes, testimonia un estadio de las matemáticas en el que la manipulación de las razones estaba llena de razonamientos circulares, como ya lo explicamos en el ejemplo del pentágono, a consecuencia de la inevitable utilización de las proporciones y de la similitud (para una reconstrucción de esta etapa, cf. Fowler, 1979 y 1980 y Knorr, 1975, VIII y IX).

Esas tres trazas del tanteo que precedió la solución de Eudoxo no agotan el campo de soluciones posibles. Sin embargo representan, cada una, salidas relativamente internas a las matemáticas, aunque la segunda esté marcada por los presupuestos panaritméticos de los pitagóricos. Según lo que dijimos mas arriba sobre el carácter indiferenciado del pensamiento pitagórico, otras salidas mas externas, es decir en lo que consideramos ahora como el dominio de la filosofía, eran posibles. Podemos por ejemplo considerar que las dificultades encontradas se debían a la imposibilidad del pensamiento de explicar la realidad sin contradicción. Esta posición no era inconcebible para el pensamiento griego: es la de algunos sofistas (Gorgias, Protagoras), es la de la escuela eleata de Parménides y de Zenón y es en alguna medida la de Platón (cf IV). El reparto entre esos distintos pensamientos se sitúa primero en el nivel de la posibilidad de escapar al carácter contradictorio del conocimiento de lo real (doxa) considerando objetos de pensamiento no contradictorios, esta última posicion, rechazada por los sofistas, es la de Platon y los eleatas, aunque difieren luego en su concepción de ese mundo de las ideas: los objetos matemáticos se mantienen en el pensamiento de Platón, mientras que su existencia no contradictoria era negada seguramente en el pensamiento eleata, pero son puros objetos de pensamiento y Platón denuncia severamente la ilusión que consiste en tomarlos por

[4] Referirse al comentario de Heath (1956) sobre estas definiciones

objetos reales (cf Thuillier, 1985). La posición opuesta aparece en ciertos sofistas: el estatuto de objeto de pensamiento se le rehúsa a los objetos geométricos que heredan entonces las porpiedades contradictorias de lo real, y segun Aristoteles, Protagoras "refuta a los geometras" (cf G. Romeyer-Dherbey 1985) en sus ilusiones. Asi mismo, la tentativa de cuadratura del circulo de Antiphon revela una relacion con la geometria denunciada por Aristoteles como no cientifica (G. Romeyer-Dherbey op cit) y completamente diferente de la que encontramos en Euclides.

Concluyamos este breve panorama que apoya, en este caso articular, la afirmacion segun la cual la superacion de una contradiccion no esta contenida en los terminos en los que esta se expresa. El estudio podria profundizarse buscando afinar el analisis de los diversos comportamientos adpotados para superar la contradiccion segun el modelo de Lakatos (1984): no el el objeto principal de este trabajo. Sin embargo debemos subrayar un aspecto: la solución clásica de Eudoxo no era la única posible, y su éxito no solucionaba todos los problemas: el de la razón entre la circunferencia y el diámetro del circulo quedó todavía durante mucho tiempo, y hasta hoy en día como un problema abierto.

IV Internalismo y externalismo: la influencia de la sociedad griega

Los filósofos siempre se sorprendieron de la aparición simultanea (a nuestra escala, e. d. en uno o dos siglos) en Grecia, en el siglo sexto y quinto antes de Cristo, de la democracia (al menos para la minoría de los ciudadanos), de la filosofía, de la "geometría" (cf por ejemplo, J. Patocka, 1981, p. 65-77). Para ellos, no hay duda que la aparición de la demostración en matemáticas solo es la aplicación en esta ciencia del debate publico en el ágora que caracteriza la organización política de la ciudad griega en relación con los regímenes que la precedieron y los que la rodeaban. Durante mucho tiempo, el origen de esa democracia griega pareció tan misterioso que se hablaba de "milagro griego". El milagro griego, materializado por el nacimiento de la democracia, de la filosofía, de la geometría, consistía en el descubrimiento por la humanidad de la "razón", concebida implícitamente como una estructura de pensamiento universal, independiente de las civilizaciones, que los Griegos habrían sido los primeros en descubrir.

Luego el progreso de la ciencia histórica, en particular el acceso a la escritura de la civilización miceniana que precedió a la de la Grecia clásica, permitió comprender el **"milagro griego"** y explicar como las transformaciones sociales permitieron pasar del pensamiento mítico a un pensamiento racional, aún parcialmente marcado por sus orígenes y que, ahora consideramos como la racionalidad griega, y no como la encarnación de una mítica razón universal; todavía somos en gran medida herederos de esta racionalidad pero sabemos ahora que está relacionada con una civilización y una historia: para nosotros, la razón ya no es un valor que reina en el cielo de las ideas y descubierta por los griegos, sino una construcción , con una fecha histórica, debida a una civilización que enfrentaba ciertos problemas (desarrollo del comercio, ...etc) Para todo esto podrá consultarse J.P. Vernant (1962 o 1982, en particular: Razón de ayer y de hoy) que ya citamos en la introducción: para los historiadores del pensamiento, el origen de la racionalidad es político, resultado del debate contradictorio sobre el gobierno de la ciudad: "*el espíritu de la polis es un espíritu de unidad en la discordia, en la lucha*" (j. Patocka, 1981). Es muy tentador concluir una relación de dependencia simple de las matemáticas con la sociedad. pero esta conclusión tiene el defecto de tratar las matemáticas de manera demasiado global, sin tener en cuenta su contenido propio en la época considerada, contentándose con constatar una simultaneidad entre el nacimiento histórico del sistema democrático griego y la individualización de la matemática como ciencia hipotético-deductiva.

Si por el contrario examinamos, como lo hicimos en II, el contenido matemático contemporáneo de la transformación de esta ciencia, entonces tenemos que sorprendernos por otra coincidencia, entre la transformación de las matemáticas y el problema de la irracionalidad, del que ya señalamos las relaciones a priori.

Así, el examen del contenido matemático hace menos evidente la conclusión "externalista" y saca a la luz no una coincidencia simple, sino triple.

Naturalmente, los Griegos no nos dejaron un analisis epistemologico de las influencias reciprocas entre las matematicas y la sociedad, y es difícil entonces decidir entre las dos tesis, tanto mas cuanto las dos deben ser exactas, lo que parecerá tal vez mas claramente en la forma de enunciados negativos:

- sin el problema de la irracionalidad, la transformación de las matemáticas no se habría producido, incluso en la sociedad griega.
- en otro contexto social, incluso enfrentado al mismo problema, las matemáticas no se habrían transformado de la misma manera.

Para precisar esta doble afirmación en una forma mas positiva, vamos a examinar mas de cerca lo que podemos decir de la interaccion entre el desarrollo de las matemáticas y el de la sociedad griega, comenzando por exponer las tesis de Szabo y Caveing, luego mirando mas de cerca en comparación con otras civilizaciones, la aparición del razonamiento por el absurdo, Terminaremos, antes de concluir, por un retorno al papel del pitagorismo en la emergencia del problema de la irracionalidad.

4.1. La tesis de A. Szabo (1977

Esta tesis precisa y completa las de los filósofos ya que considerando que la demostración en matemáticas proviene del debate filosófico, precisa de que filósofos y de que debate se trata. Además, reconoce en el problema de la inconmensurabilidad el origen, interno a las matemáticas, del recurso a la filosofía. Esto conduce a proponer el siguiente esquema:
- En una primera etapa, se habrían constatado las propiedades contradictorias, frente a la muy antigua teoría del par y el impar, del número racional que debería medir la diagonal del cuadrado. De esta etapa serían testigos las apelaciones de "enunciable" e "inenunciable" (cf III). Esta etapa lleva a la constatación de un obstáculo en el seno de las matemáticas.
- En una segunda etapa, marcada por el rechazo de la experiencia sensible y de la intuición, en provecho de un enfoque que concibe los objetos matemáticos como puramente ideales, manipulables por medio de reglas de razonamiento rigurosas, primero únicamente por el absurdo, se habría podido definir la inconmensurabilidad y demostrarla (todo en uno) en el caso examinado. El obstáculo interno habría sido superado así con ayuda de un aporte externo, pero al precio de una reconstrucción total del carácter mismo de las matemáticas. De donde vino este aporte externo, es lo que vamos a precisar ahora examinando lo que estaba disponible en el pensamiento eleata. En efecto, para Szabo es inimaginable que el rechazo del empirismo y el uso de la demostración por el absurdo hayan aparecido espontáneamente en los griegos. Pero, a este argumento de razón, se agrega el hecho histórico de que esas actitudes son características de la filosofía eleata cuyos representantes son Parmenides y Zenon de elea. Es lo que precisamos enseguida, utilizandeo en general fuentes diferentes de las de Szabo.

Para los eleatas, el mundo sensible, el de las apariencias y de los fenómenos, no puede ser objeto de un conocimiento verdadero, no contradictorio. La verdad es inaccesible por la observación, solo es accesible al pensamiento puro: *para los eleatas... cada vez que el testimonio de nuestros sentidos se encuentra en contradicción con nuestras necesidades de razonamiento, seran estas últimas las que tomarán la delantera* (Zfiropulo, 1950, ch 2, p 69): recomendamos esta referencia, o a Caveing (1982), para una información más detallada de la escuela eleata.

Así, según los eleatas, los objetos de la sensación siempre se transforman y se convierten en sus contrarios, son en esencia contradictorios. Por el contrario, los objetos del pensamiento puro son los únicos no contradictorios, y puede probarse una afirmación sobre ellos mostrando que su negación implica una contradicción (razonamiento indirecto). Así, el razonamiento indirecto aparece como la herramienta adaptada a la manipulación de esos objetos, no para los objetos sensibles. En este punto hay acuerdo entre los eleatas y Platón a quien Szabo hace heredero del pensamiento eleata: Platón pone en escena en "El Pareménides" (trad. Chambry, 1967 p 224), Parménides, Zenón y Sócrates, y pone en la boca de Parménides la siguiente alabanza de Sócrates: "*debo decir que me agradó una observación que hiciste, cuando le dijiste que no querías dejar tu investigación perderse en los objetos visibles y aplicarse a ellos, sino dirigirla a los que pueden captarse por el pensamiento y que pueden considerarse como formas."* Y Sócrates responde *"estimo en efecto, que no es difícil demostrar de esta manera que los seres son a la vez parecidos y diferentes y susceptibles de todos los contrarios". "Y tienes razón,* dice Parménides *pero hay otra cosa que hacer. No basta suponer que un objeto existe y examinar las consecuencias de esta suposición, hay que suponer que ese mismo objeto no existe, si quieres llevar a fondo tu gimnasia..."*
Notemos cuanto el programa escrito en este texto, y que precede al estudio del problema del uno y del ser, se aplica exactamente al problema de la inconmensurabilidad: si los segmentos que entran en juego en la figura del cuadrado y de su diagonal, o en la del pentágono, pertenecen al mundo visible. no es sorprendente que sean "susceptibles de todos los contrarios". por el contrario, el paso de los objetos de la geometría al mundo de las formas les permite ser objetos de conocimiento verdadero, cuya existencia esta asegurada por la no contradicción de sus propiedades. Es la

ruptura con la realidad la que permite a la geometría tomar su lugar entre el conocimiento verdadero, al contrario de lo que sostendría un espíritu contemporáneo! (Esta afirmación es central para Platón, cf. Thuillier, 1985).

Volvamos al razonamiento indirecto: encontramos un primer ejemplo, primitivo, en el "poema" de Parménides (cf Zafiropulo, loc cit ch 2, p 136) donde es utilizado en el marco de la teoría del ser: *"en cuanto a la decisión en ese punto, consiste en esto: es o no es...*" pero es empleado sistemáticamente por Zenón, en quien Aristóteles ve el fundador de la dialéctica. ¿Qué podemos entender con esto? Aristóteles lo precisa el mismo, dando de la dialéctica una definición detallada de la que extraemos lo que sigue: la dialéctica es un entrenamiento del razonamiento, es una deducción que toma como punto de partida ideas admitidas y saca consecuencias contradictorias para refutarlas. Desde Platón, la dialéctica era conocida también como medio de elevar el espíritu de las cosas sensibles a las cosas inteligibles (cf Caveing, 1982, ch III, n3). Finalmente, indiquemos, y luego volveremos a verlo, que Aristóteles indica que los pitagóricos ignoraban la dialéctica (Aristóteles, trad. Tricot, 1964, A6, p63).

Basándose en su tesis de la importación de la abstracción, del razonamiento por el absurdo, en matemáticas a partir del pensamiento eleata, Szabo (1977) aporta además un cierto numero de argumentos, esencialmente de orden filológico, del que se encuentra un resumen en Arsac (1984). Sin embargo, no nos parece posible decidir si la influencia eleata se ejerció directamente o si pasó esencialmente por intermedio de Platón que tenía como discípulos los matemáticos Teeteto y Eudoxo, precisamente los que según los historiadores de las matemáticos griegos, perfeccionaron definitivamente la solución del problema de la irracionalidad (Knorr, 1975, ch II, III). Retengamos simplemente la hipótesis de un origen eleata, es decir externo, del razonamiento por el absurdo y agregaremos en 4.3 y 4.4 algunos argumentos suplementarios en favor de esta tesis sin seguir a Szabo en sus conclusiones demasiado extremas que van hasta hacer de las matemáticas una simple parte de la dialéctica y de los Eleatas matemáticos (esta opinión de Szabo (1977) parece aventurada: cf, la critica de Caveing (1979)).

4.2 La tesis de M. Caveing (1977)

Los trabajos de Caveing no tienen por objeto la aparición de la demostración, al contrario de los de Szabo, sino el origen del estatuto de los objetos matemáticos, de su "idealidad" "*... reuniendo los cuatro caracteres de la objetividad, la no pertenencia a lo sensible, la perfección y la inteligibilidad..."*(Caveing, 1977 p 1612). sin embargo, así como lo indicamos en I, esta definición de los objetos de la matemática, que la constituye al mismo tiempo como ciencia autónoma, es necesariamente contemporánea de la aparición de la demostración, lo que nos llevó a citar y utilizar a menudo la obra de Caveing.

Resumiendo, el punto de vista de este último sobre la interacción entre matemáticas y filosofía es más bien opuesta al de Szabo, a quien critica (Caveing 1979). Para él, el problema de la inconmensurabilidad, al que atribuye igualmente un papel fundamental, es la fuente de la creación de las idealidades matemáticas que habrían servido después de modelo a los filósofos, esencialmente Platón y Aristóteles. Así, la corriente es inversa, y aquí son los matemáticos quienes informan a la filosofía. En cuanto a la interpretación del pensamiento de Zenón, fue desarrollada ampliamente por Caveing (1982): la argumentación de Zenón sería esencialmente contra el sincretismo físico-geométrico del pensamiento pitagórico: argumentos como "el Aquiles" o "la flecha", los mas conocidos, no los únicos, tendrían por objetivo mostrar por el absurdo, es decir por la dialéctica como la definimos anteriormente, que las ideas pitagóricas no permiten pensar el movimiento y el continuo geométrico de manera no contradictoria.

Aun restringiendo a lo anterior, la influencia de los eleatas y de Zenón en particular serían no despreciables, ya que en suma, Zenón habría cuestionado los principios del pitagorismo y en particular la concepción de los objetos de la geometría, independientemente tal vez del problema de la irracionalidad, pero seguramente de manera simultanea. Agreguemos que la técnica de la dialéctica, que comienza siempre explicitando lo más completamente posible los presupuestos del adversario, llevaba a enunciar completamente, y a precisar, los fundamentos del pitagorismo, del que indicamos en II el carácter inicial probablemente indefinido y generalmente implícito.
Retendremos la idea de Caveing que la transformación de las matemáticas se debe primero al problema interno de la irracionalidad, primero en razón de los argumentos que desarrollamos al final de la introducción contra la posición excesivamente externalista de Szabo, pero también porque la reconstitución de la aparición en el campo de las matemáticas del problema de la irracionalidad nos parece la más verosímil. Mostraremos además en 4.4, como para el razonamiento por el absurdo en 4.3, que existen buenas razones para que el problema de la irracionalidad haya aparecido en el campo griego y no en otra parte.

4.3.*El origen del razonamiento por el absurdo: comparación con otras civilizaciones.*
Como lo vimos, este tipo de razonamiento aparece desde la antiquísima prueba de la inexistencia de $\sqrt{2}$, y Szabo (1977) anota que Euclides lo utiliza de manera privilegiada, mientras que Platón lo convierte en el procedimiento típico del matemático.

Para reforzar nuestra hipótesis sobre el origen externo de esta manera de pensamiento, nos parece interesante salir del marco griego, anotando que el razonamiento por el absurdo no se usa en las matemáticas chinas (J. Dhombres, comunicación oral) e Indias hasta el siglo 14 aproximadamente. En el caso de la India, podemos precisar que este hecho está relacionado con la ausencia del principio del tercero excluido, y que ese fenómeno está relacionado con el desarrollo de una teoría particular de la lógica, adaptado a la lingüística (Singh, 1984). En el caso del pensamiento chino, podemos señalar también que ignora e incluso niega el principio del tercero excluido (liou Kia Hway, 1961) Para nuestros propósitos, nos basta señalar que las matemáticas elaboradas habrían podido desarrollarse durante siglos en algunas civilizaciones sin que la lógica de ese desarrollo hiciera aparecer el principio del tercero excluido y del razonamiento por el absurdo. Esto intercede en favor de un origen por lo menos en parte externo de la aparición del razonamiento por el absurdo en las matemáticas griegas. En ese caso, la paternidad eleata no se pone en duda: vimos en 4.1 y 4.2 el papel de Zenón y Parménides.

Vemos además en el poema de Parménides (loc cit) como el carácter no contradictorio de un objeto de pensamiento asegura su existencia, lo que esta totalmente fuera de las perspectivas india (cf Singh, loc cit) y china.

4.4. *El rol del pitagorismo en la aparición del problema de la irracionalidad*

Volvamos ahora al marco griego, para examinar de nuevo las circunstancias de la emergencia del problema de la irracionalidad y de la inconmensurabilidad (cf 2.2). Aquí, las ideas de los pitagóricos, incluso no claramente expresadas en un cuerpo de doctrina, jugaron un rol fundamental. Dijimos en efecto que la hipótesis de la universalidad de las relaciones racionales entre longitudes era subyacente a las matemáticas babilónicas y egipcias. pero al enunciar esta frase, nos arriesgamos al anacronismo. En efecto, se trata en esas matemáticas de una hipótesis totalmente implícita, más bien una evidencia, no descontextualizada de la experiencia concreta que permite, por distintos procedimientos encontrar aproximaciones, por métodos que dependen de formas particulares de escritura de los números propios de cada civilización, diferentes razones necesarias ala solución de problemas encontrados. En esos métodos, el número entero solo puede distinguirse de las fracciones o de los desarrollos sexagesimales, por su manipulación más fácil y como consecuencia de los métodos empleados, las aproximaciones de ciertas relaciones racionales pueden revelarse tan delicadas como las relaciones irracionales. En ese contexto, la cuestión de la irracionalidad no puede plantearse. Al contrario la hipótesis "panaritmetica" del pitagorismo, incluso si era más mística que matemática, focalizaba la atención en las relaciones de enteros "exactos", y tenía el gran merito de ser "falsifiable" para emplear el lenguaje ahora clásico de Popper. Dicho de otro modo, incluso si fue a pesar suyo, el pitagorismo fue el marco donde podía surgir el problema de la irracionalidad, postulando a priori una relación simple entre la aritmética de los números enteros y el universo, en particular la geometría. Tal vez además haya desempeñado el mismo rol en lo concerniente al continuo donde su concepción fue refutada por Zenón. Así, el pensamiento pitagórico puede considerarse como un primer paso, o como favoreciendo los primeros pasos hacia una concepción más teórica de las matemáticas.

Precisemos sin embargo una vez más, el carácter arcaico de este pensamiento reproduciendo aquí la "tabla pitagórica de los opuestos" (Aristóteles, trad Tricot, 1964 A5 p 45-46)

limitado e ilimitado
impar y par
uno y múltiple
derecho e izquierdo
macho y hembra
en reposo y en movimiento
rectilíneo y curvo
luz y oscuridad
bueno y malo
cuadrado y oblongo

La existencia de esta tabla acerca el pensamiento pitagórico a otros pensamientos primitivos: incluso la oposición par impar no es original y puede aparecer en culturas que no hayan desarrollado pensamiento matemático (L. Scubla, 1982); así, incluso la herramienta fundamental de la aritmética pitagórica, es decir la división de los números en pares e impares, puede tener un origen no matemático. Podríamos inclinarnos a creer que la atención particular dada a los números enteros pudo focalizar la atención de los pitagóricos en una pareja de la tabla de opuestos para la cual el tercero excluido era evidente: aquí por ejemplo lo que escribía sobre esto un matemático comentando una demostración pro el absurdo de Euclides: *"la audacia particular de este procedimiento se debe a la conclusión que ese numero debe ser par porque no puede ser impar. Así la frecuentación de los números hizo nacer el pensamiento y la idea de la no contradicción del pensamiento en el seno de los conceptos".* (citado por Szabo, 1977, p 237). Esta conclusión internalista no se sostiene porque para los pitagóricos, la unidad participaba a la vez de lo par y lo impar y además la definición de estas nociones era sin duda muy diferente de la definición matemática actual. De una manera general, tales tablas se asocian más bien con pensamientos que ven en la realidad la mezcla de los opuestos mas que su separación[1].

4.5. *conclusiones*

Resumimos ahora las conclusiones que pudimos sacar en distintos pasajes de este texto: reposan, sea en el acuerdo de los historiadores cuando nos pareció que existía (lo que excluye que utilicemos conclusiones subordinadas a un debate que visiblemente no ha terminado como por ejemplo una interpretación particular del texto de teeteto de Platón: cf Caveing (1977) y (1979), Knorr (1975, Szabo (1977)) sea en argumentos que expusimos en ese aparte o en la introducción, y que se basan en el análisis didáctico o en argumentos históricos.

1) la aparición en las matemáticas griegas del problemas de la irracionalidad y de la inconmensurabilidad se debe a las concepciones pitagóricas, en particular al "panaritmetismo". En la medida en que las matemáticas no están entonces totalmente individualizadas en el campo del pensamiento, es difícil hablar de origen interno o externo al respecto.

2) este problema está en el origen del desarrollo de un nudo de contradicciones en el que se individualizara cada vez más como campo bien delimitado del pensamiento: las matemáticas, más exactamente la geometría. Podemos hablar aquí del problema interno de las matemáticas.

3) La solución definitiva del problema hace uso ampliamente de los modos de pensamiento disponibles en la sociedad contemporánea, en particular el eleatismo. Por supuesto, hubo sin duda influencia reciproca (ver más detalles sobre este punto en particular el problema del pensamiento de la pluralidad y el elatismo, en Arsac 1984). como lo vimos en II, hay una relación entre el establecimiento de esta solución definitiva y la concepción de las matemáticas como ciencia hipotético-deductiva que conducirá, en su forma acabada, a los elementos de Euclides, y que hace de la demostración un uso sistemático.

V. Algunas conclusiones didácticas

Corriendo el riesgo de repetir algunas observaciones incluidas en el texto, resumimos aquí las conclusiones que nos parecen posibles de este estudio, y las preguntas que quedan abiertas, a nuestro parecer, en el plano de la didáctica.
5.1. La historia parece mostrar que hubo "pruebas" antes de la demostración, es decir que la historia del rigor, que sabemos no se terminó con los griegos (cf Lakatos, 1984; IREM 1982), tampoco comienza con ellos. Parece razonable hacer la hipótesis que el aprendizaje de la demostración debe ser precedida de la practica de pruebas en situaciones de clase donde la necesidad de validación de una afirmación aparece naturalmente, es decir como una pregunta que surge entre los alumnos, no como una exigencia del profesor. Sobre este punto, enviamos a las conclusiones de Balacheff, 1987 (dos problemas didácticos, estatuto escolar de la prueba), que el estudio que hicimos confirma. Añadimos simplemente que las "pruebas" predemostrativas que pueden aparecer, digamos antes de la clase cuarta (niños de trece años) en el sistema francés, podrían tener el carácter aislado que señalamos, que además es favorable al montaje de situaciones de clase que conduzcan a su aparición, mientras que la aparición de la

[1]La critica de Caveing (1979) contra Szabo (1977), y más precisamente contra la hipótesis de un origen eleata del razonamiento por el absurdo, no parece entonces válida: se poya en efecto, sobre la existencia de la tabla de los opuestos para deducir el conocimiento del razonamiento por el absrudo de los pitagóricos.

demostración marca un cambio del estatuto global de la matemática para el alumno (cf Balacheff: el alumno se convierte en teórico, antes era un practico). Hay un obstáculo que es necesario superar, el que los griegos se tomaron un siglo para hacerlo.

5.2. Una pregunta importante es la siguiente, desde el punto de vista didáctico: el paso a un estadio de demostración puede ser motivado por las necesidades internas de las matemáticas, es decir la demostración puede aparecer primero como herramienta indispensable en ciertas situaciones, o hay que resignarse a hacer una fuerte referencia a las informaciones aportadas por el profesor e incluso a exigencias introducidas por el contrato didáctico? La pregunta análoga desde el punto de vista histórico es la del origen interno o externo a las matemáticas del paso al estadio demostrativo. No nos parece que podamos dar una respuesta definitiva (IV)aunque nos inclinamos por una conclusión mixta que ya enunciamos. Sin embargo, mostramos que ese paso a la demostración tuvo lugar al encontrar un problema, manifestante de una contradicción en las matemáticas, y para el cual la demostración aparecía como herramienta indispensable para la solución finalmente reconocida como aceptable. Este problema poseía todas las características de una situación problema en sentido didáctico: surgió en el marco de los conocimientos existentes ("el **antiguo"** en el sentido de Chvallard, 1985, p65), no podía ser resuelto sin salir de ese marco (el "nuevo") y muy probablemente, su solución fue facilitada por cambios de marco apropiados. Así, aparece la afirmación minimal siguiente: la demostración, si quieren crearse las condiciones de su génesis histórica, debe aparecer como una herramienta indispensable a la solución de un problema. No podemos sin embargo hacer esta condición necesaria una condición suficiente y afirmar que solo la situación y el contenido del problema pueden conducir necesariamente a la demostración, basándonos en datos históricos. Estos no excluyen un aporte externo, que en la génesis didáctica, puede provenir como lo dijimos, de una información aportada por el profesor abandonando en parte la evolución del problema, o tal vez aunque no se haya explorado hasta ahora, un enfoque interdisciplinario del rigor.

5.3. La reproducción de la génesis histórica de la demostración a partir del problema de la irracionalidad no es posible en el nivel escolar concernido. En efecto desde el punto de vista estrictamente técnico, la evidenciación de la inconmensurabilidad en geometría es demasiado difícil, el de la irracionalidad en aritmética, aunque más simple, es complejo, pero sobre todo, desde el punto de vista del sentido, no vemos que podría motivar a los alumnos a una investigación sistemática de razones de enteros, cuando la manipulación de los decimales es una técnica eficaz. Es decir, nuestros alumnos son más babilónicos que pitagóricos!

5.4 En geometría, la aparición de la demostración esta relacionada históricamente a la de la concepción abstracta de los objetos de la geometría, digamos abusivamente, a su definición axiomática. Querer introducir en la enseñanza la demostración a propósito de la geometría argumentando el carácter concreto de esta, es sostener una paradoja de la que hay que estar concientes: es precisamente el carácter concreto de los seres geométricos que hace inútil la demostración: la "prueba por la figura" basta. Esta dificultad se evita en general por la presentación a los alumnos de caso de figura donde la verificación grafica es técnicamente difícil. El problema encontrado en ese caso no necesita como remedio el recurso a la demostración: una figura más pulida, un cambio de escala pueden aparecer eventualmente como remedios apropiados. Más generalmente, tales situaciones, que ponen en duda la referencia a la figura, a propósito de figuras particulares, hacen acudir a remedios particulares, es decir pruebas cuyo nivel se adapta en cada caso. No son entonces de la misma naturaleza que el encuentro con el fenómeno de la inconmensurabilidad pues, incluso si ésta se hace a propósito de una figura particular, la reflexión muestra entonces que la contradicción se propaga al conjunto de la geometría.

Si quieren producirse los mismo efectos que la génesis histórica, habría que, como primera etapa hacia la demostración en geometría, llegar a poner en duda la referencia a la figura como medio de prueba, que presenta un carácter general y no se limita a la incertidumbre sobre algunas figuras particulares. Podemos pensar además que otros terrenos como el aritmético sean más favorables a la emergencia de la demostración como herramienta de prueba, sin que sea necesario recurrir al problema de la irracionalidad.

5.5. La reflexión que hicimos sobre el razonamiento por el absurdo, en particular la comparación con las matemáticas chinas e indias, parece indicar un origen cultural. Esto conduce a pensar que ese razonamiento y más aún, el principio del tercero excluido, no es "natural" ni en matemáticas ni fuera de ellas, y que su introducción hace parte de las tareas de la enseñanza de las matemáticas, o incluso de un trabajo interdisciplinario. Allí también la aritmética, con la clasificación de los números en pares e impares, puede ser un punto de partida posible.

VI. Bibliografía.

ARISTOTE (1) *La Métaphysique,* tr. Tricot, Vrin (1 964) Paris.
ARISTOTE (2) Organon *5 Les Topiques,* tr. Tricot, Vrin (1950) Paris.
ARSAC G. (1984) Thèses contemporaines sur l'apparition de la démonstration dans les mathématiques, *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique,* IMAG, Université Grenoble 1.
AUTOLYCOS DE PITANE. *La sphère en mouvement, levers et couchers héliaques, Testimonia,* Les Belles Lettres, (1979), Paris.
BACHELARD *G. La formation de l'esprit scientifique, 12è-e* édition, Vrin, (1983), Paris.
BALACHEFF N. (1987) : Processus de preuve et situations de validation *Educational Studies in Mathematics,* vol 18, n2, Mai 1987, p. 147-176.
BOURDIEU P. (1980) *Le sens pratique,* coll. le sens commun, Ed. de Minuit, Paris.
BOYER C. B. (1968) : *A history of mathematics,* Wiley, New York.
CHEVALLARD Y.(1985) *La transposition didactique,* La Pensée Sauvage, Grenoble.
CAVEING M. (1977) *La constitution du type mathématique de l'idéaltté dans la pensée grecque,* thèse, Université Paris 10, Atelier national de reproduction des thèses, Université Lille 3, (1982).
CAVEING M. (1979) A propos des débuts des mathématiques grecques. Réflexions sur l'ouvrage de A. Szabo. *Revue d'histoire des sciences,* XXXII/2 p. 163-168.
CAVEING M. (1982) *Zenon* d'Elée,Vrin, Paris.
DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet Recherches en didactique des mathématiques. vol 7.2, p. 5-3 1.
FOWLER D.H. (1979) Ratio in early Greekmathematics, Bull. *of the AMS* (New series) 1, p. 807-846.
FOWLER D.H. (1 980) Book 2 of Euclid Elements and a pre-eudoxian theory of ratio, *Archiv for History of exact sciences,* vol 22, number 1/2, p.5-36.
HEATH T. L. (1908) Euclid's'Elements, Dover, 1956, New York.
IREM (Groupe Epistémologie et Histoire des) (1982), *La rigueur et le calcul,* CEDIC-Nathan, Paris.
KAYAS (1978) G. *J.* Euclide : les Elements, Editions du CNRS, Paris.
KELLER O.(1986) *Essai sur le calcul et l'algèbre en Egypte antique,* IREM de Lyon, doc. n>57, (Mffl, 43, bvd du Il nov. 1918, 69622 Villeurbanne CEDEX).
KLINE (1972) *MathemAtical Thought from ancient to modern times,* Oxford University Press, New York.
KNORR (1975) W. R. *The évolution of the euclidean elements,* Reidel, Dordrecht.
LAKATOS 1. *(1976) Preuves et Réfutations,* Actualités scientifiques et industrielles n'1412, Herinann (1984) Paris.
MARTZLOFF (1988) J. *C. Histoire des mathématiques chinoises,* Masson, Paris.
PATOCKA I. (1981) *Essais hérétiques sur la philosophie de l'histoire,* Verdier, Paris.
PLATON *Le Ménon,* traduction E. Chambry, Flammarion (1967).
PLATON *La République,* traduction A. Diès, Denoël-Gonthier (1977), Paris.
PLATON *Le Théétète, Parménide,* traduction E. Chambry, arion (1 967) Paris.
ROMEYER-DHERBEY G. (1985) *Les sophistes,* Que Sais-je? PUF, Paris.
SZABO A. (1977) *Les débuts des mathématiques grecques,* Vrin, Paris.
SEIDELBERG A. (1978) The Origin of mathematics, Archiv *for History of exact sciences, vol.* 1 8, nb 4, p. 301-342. SCUBLA L. (1982) " Contribution à la théorie du sacrifice " in *ReW Girard et le problème du mal,* textes rassemblés par M. Deguy et J.P. Dupuy, Grasset, Paris.
SINGH N. (1 984) Foundations of logic in ancient India : linguistic and mathematics in *Science and technology in Indian culture,* Nistads (Hillside Road, New DeUù, 110012).
TANNERY (1887) *La géométrie grecque* Gauthiers-Villars, Paris. Réédition J. Gabay, Sceaux, 1988.
THUILLIER P. (1985) Sociologie de la connaissance : Platon et la géométrie, *La Recherche* vol. 16, n" 1 66, Mai 1985, p. 664-667.
VAN DER WAERDEN B.L. (1983) *Geometrv and algebra in ancient civiiizations,* Spiinger, Berlin.
VERNAN'T J.P. (1962) *Les origines de la pensée grecque, PUF,* Paris.
VERNANT J.P. (1979) *Religion, Histoire,Raison, Maspero,* Paris.
VERNANT J.P. (1 98 *1) Myth c et pensée chez les Grecs,* tome 1, Maspero, Paris,

VERNANT J.P. (1 982) *Myth e et pensée chez les Grecs*, tome 2, Maspero, Paris.
VON FRITZ K. (1 945) The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum, *Annals of Math.*, 2ème série, 46, p. 242-264.
ZAFIROPOULO J. (1950) *LEcole éléate*, Belles Lettres, Paris.